

Versuch: P1-73

Halleffekt

- Auswertung -

Versuchsdurchführung: Mittwoch, 23.11.2005

In den Überschriften ist angegeben, wo der statistische und wo der totale Fehler errechnet wurde (bei den Rechnungen über die Ausgleichsgeraden haben wir den systematischen Fehler nicht berechnet, da eine Fehlerfortpflanzungsrechnung bei den komplexeren Summen-Ausdrücken sehr schwierig wäre).

Inhaltsverzeichnis

1	Messung des magnetischen Feldes mit einer Feldplatte	2
1.1	Magnetfeld im Luftspalt	2
1.2	Widerstand der Feldplatte	4
2	Messungen an einer Metallhallsonde	5
2.1	Bestimmung der Hallkonstante R_H sowie von n_{Au} und ξ_{Au}	5
2.1.1	Hallspannung über Magnetfeld $U_H(B)$ (statistischer Fehler)	5
2.1.2	Hallspannung über Steuerstrom $U_H(I_S)$	9
2.2	Leitfähigkeit und Elektronenbeweglichkeit in Gold (Gesamtfehler)	10
3	Messungen an einer Metallhalbleitersonde	11
3.1	Bestimmung der Hallkonstante R_H sowie von n_{Au}	11
3.1.1	Hallspannung über Magnetfeld $U_H(B)$ (statistischer Fehler)	11
3.1.2	Hallspannung über Steuerstrom $U_H(I_S)$	13
3.2	Abhängigkeit des Hallwiderstandes vom Magnetfeld (Gesamtfehler)	13

1 Messung des magnetischen Feldes mit einer Feldplatte

1.1 Magnetfeld im Luftspalt

Die Situation, die man am Praktikumsplatz vorfand war eine relativ einfache: die beiden Spulen waren aufgebaut, es gab eine Stromquelle mit eingebautem Regler und Amperemeter, die die Spule versorgte. Zwischen den beiden Spulen waren bereits die Hallsonden angebracht, so dass diese eine stationäre Position hatten und nicht mehr extra von uns verstellt werden mussten. Desweiteren waren auch die Schaltungen eher unkompliziert, da sie sich alle in einem bereits aufgebauten Bauteil befanden, dass man mittels eines 3-stufigen Reglers verstellen konnte. Es gab die Einstellungen für die Messungen mit der Feldplatte, die Messungen mit der Metallhallsonde und mit der Halbleiterhallsonde.

Für die Messung der Hallspannung stand uns ein analoges Messgerät zur Verfügung, dessen Messbereich von Einstellungen von 0,15mV bis 500mV auf der Skala variierten. Die Messung des Stromes durch die Spule wurde durch das analoge Amperemeter an der Stromquelle selbst durchgeführt, wobei der Steuerstrom der Sonde mit einem digitalen Messgerät gemessen wurde.

Der Aufbau samt Schaltplan ist der Vorbereitung zu entnehmen.

Im Versuch wird die Feldplatte mit praktisch konstantem Strom betrieben. Die Feldplatte liegt in Reihe mit einem Vorwiderstand R_V an einer Spannungsquelle. R_V ist etwa 40 mal so groß wie der größtmögliche Wert des Widerstandes der Feldplatte in diesem Versuch. Daher wird der Strom I_f , der durch R_V und die Feldplatte fließt, im wesentlichen von R_V bestimmt. Die Spannung U_f , die an der Feldplatte abfällt, ist daher ein direktes Maß für das Magnetfeld B . Die Eichkurve $B(U_f)$ lag am Versuchsplatz aus.

Der Vorwiderstand betrug $R_V = 25k\Omega$. Das Vorgehen war nun folgendes:

- Zuerst legten wir eine feste Spannung U_0 an, mit $U_0 = 6,3V$.
- Dann stellten wir einen Spulenstrom ein und lasen die Spannung U_f vom analogen Messgerät ab.
- Mittels der Eichkurve (hilfreiches Milimeterpapier!) konnte nun der Wert des Magnetischen Feldes bestimmt werden, indem man schaute, bei welchem Wert des Magnetfeldes die Spannung U_f zu finden ist.
- Wir gingen nun in festen Abständen von 0,2A für den Spulenstrom voran und bestimmten die entspr. B -Felder.

Sinn und Zweck dieser Messung ist der - da wir ja nicht direkt das Magnetfeld einstellen können, sondern nur über den Umweg des Stromes durch die Spulen - dass wir Werte für I erhalten, von denen wir wissen, welche Werte für B diese nach sich ziehen.

Darin lag nun ein kleiner Denkfehler unsererseits: wir gingen in diskreten Schritten für I vor, wobei wir ungerade Werte für B erhielten. Das sollte jedoch anders herum gemacht werden, da man in den folgenden Aufgaben einen festen Wert für B einstellen sollte. Es wäre zwar eine Annäherung mittels Excel möglich gewesen - ein Polynom 4. Grades approximiert unsere Messwerte erstaunlich gut - und man hätte aus der erhaltenen Formel die diskreten Werte (0,2 T, 0,4 T, 0,6 T...) errechnen können, wir entschieden uns jedoch zur Sicherheit die Werte lieber zu messen als zu berechnen.

Die Werte sind trotzdem in Teilaufgabe 1.2 sehr gut verwendbar, da wir hier den Widerstand berechnen sollen. Es wäre unvorteilhaft hier die von uns danach gemessenen Werte zu verwenden, da die ursprünglichen Werte einfach sehr viel mehr sind und somit der statistische Fehler im Vergleich zu einer Messung mit wenigen Werten abnimmt.

Wir maßen also nun folgendermaßen:

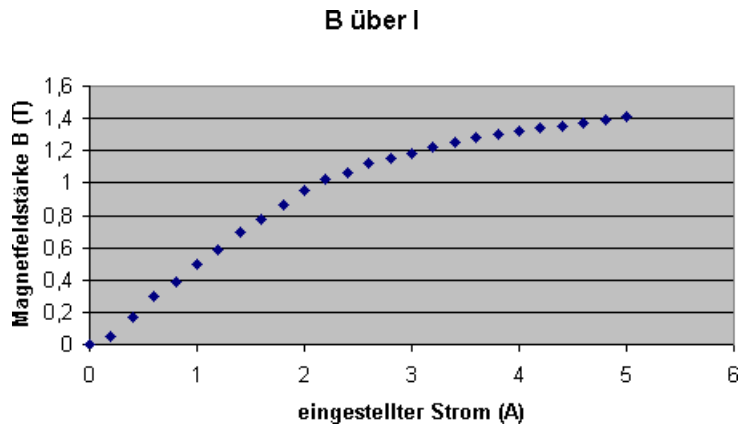
- Die gesuchte B -Feldstärke wurde auf der Eichkurve betrachtet - es ergaben sich durch ablesen die Werte für die einzustellende Spannung.
- Jetzt wurde der Strom durch die Spule so eingestellt, dass das Voltmeter genau den benötigten Wert anzeigt.
⇒ Wir führten die Messung von oben in umgekehrtem Durchlaufsinne durch.

Es ergaben sich die folgenden Messwerte:

einzustellendes Magnetfeld (in T)	dafür benoetigte Spannung (in mV)	Strom I durch die Spulen (in A)
0,2	35	0,45
0,4	57	0,8
0,6	92	1,2
0,8	135	1,6
1	190	2,2
1,2	250	3,1
1,4	310	4,9

Hierbei wurden die ersten vier Werte für die Spannung am Voltmeter in einem Messbereich von 150mV abgelesen und die drei letzten Werte im Messbereich von 500mV.

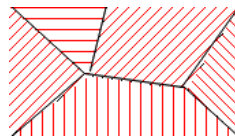
Es sollte nun das Magnetfeld über dem Spulenstrom I aufgetragen werden:



(Anm.: es wurden hier zwecks besserer Übersicht die Werte aus der 1. Messung verwendet - die mit diskreten Stromwerten ermittelt wurden - da bei dieser Messung einfach mehr Werte zur Verfügung stehen. Die Wertetabelle befindet sich in Aufgabenteil 1.2)

Zunächst steigt die Magnetfeldstärke B linear mit dem Spulenstrom an. Hierbei wird der Eisenkern vom Magnetfeld beeinflusst. Zum genaueren Verständnis muss man in die mikroskopische Ebene hinab gehen:

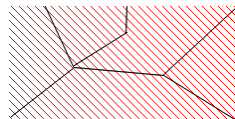
In ferromagnetischen Stoffen gibt es eine kleine Dipol-Teilbereiche, die parallel ausgerichtet sind (*Weiß'sche Bezirke*). Makroskopisch hat das keinen Einfluss, da diese Bezirke statistisch verteilt sind und sich die einzelnen Ausrichtungen im Großen wieder herausmitteln.



Legt man nun allerdings ein äußeres Feld an, $B_0 = \mu_0 \cdot H$, so werden die Bereiche in die gleiche Richtung ausgerichtet - dabei wird ein magnetisches Moment vom Betrag M erzeugt, das, auf das Volumen bezogen, *Magnetisierung* heißt ($J = M/V$) und das äußere Feld vergrößert: $B_m = B_0 + \mu_0 \cdot J$.

Hierbei muss ein Effekt notwendigerweise auftreten: Sättigung!

Da nämlich die Anzahl der Weiß'schen Bezirke begrenzt und somit endlich ist, kann das äußere Magnetfeld auch nur endlich viele Bezirke ausrichten. Diese sind dann alle irgendwann ausgerichtet:



Damit erklärt sich die oben im Diagramm auftretende Abflachung der Kurve.

1.2 Widerstand der Feldplatte

Aus den im Experiment gemessenen Größen (U_0 sei die Spannung an der Quelle, U_f die an der Feldplatte gemessene Spannung und R_V der Vorwiderstand) lässt sich der Widerstand der Feldplatte (R_f) folgendermaßen bestimmen. Es gilt:

$$R_{ges} = R_V + R_f, \quad U_f = R_f \cdot I, \quad U_0 = R_{ges} \cdot I$$

Somit ergibt sich durch Umformung:

$$\begin{aligned} U_0 &= R_V \cdot I + R_f \cdot I = R_V \cdot \frac{U_f}{R_f} + U_f \\ \Rightarrow R_f &= \frac{U_f}{U_0 - U_f} \cdot R_V \end{aligned}$$

wobei gegeben ist: $U_0 = 6,35 \pm 0,05V$ und $R_V = 25k\Omega \pm 1\%$.

Für die Widerstandsänderung gilt (mit R_0 = Widerstand bei $B = 0T$):

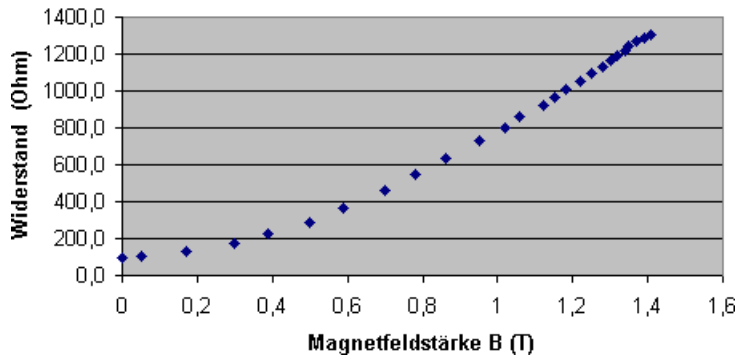
$$\Delta R = \frac{R_f - R_0}{R_0}$$

Es ergaben sich folgende Werte (errechnet mit den Werten aus der Messung mit diskreten Stromstärken):

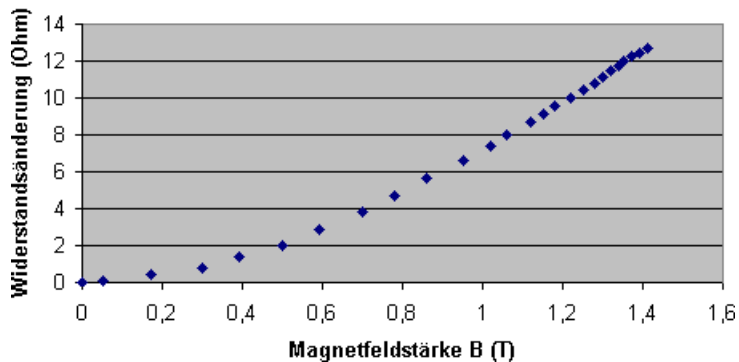
Strom I durch die Spulen (in A)	Spannung U_f (in mV)	Magnetfeld B (in T)	Messbereich des Voltmeters (in mV)	R_f (in Ω)	ΔR (in Ω)
0	24	0	50	95,6	0
0,2	26,6	0,05	50	106,0	0,1
0,4	33,6	0,17	50	134,0	0,4
0,6	43	0,3	150	171,8	0,8
0,8	56,5	0,39	150	226,2	1,4
1	72	0,5	150	289,0	2,0
1,2	91	0,59	150	366,4	2,8
1,4	115	0,7	150	464,8	3,9
1,6	135	0,78	150	547,4	4,7
1,8	156	0,86	500	634,8	5,6
2	178	0,95	500	726,9	6,6
2,2	196	1,02	500	802,8	7,4
2,4	210	1,06	500	862,1	8,0
2,6	225	1,12	500	925,9	8,7
2,8	234	1,15	500	964,4	9,1
3	244	1,18	500	1007,3	9,5
3,2	255	1,22	500	1054,6	10,0
3,4	264	1,25	500	1093,4	10,4
3,6	272	1,28	500	1128,1	10,8
3,8	280	1,3	500	1162,8	11,2
4	286	1,32	500	1188,9	11,4
4,2	292	1,34	500	1215,0	11,7
4,4	298	1,35	500	1241,3	12,0
4,6	305	1,37	500	1271,9	12,3
4,8	308	1,39	500	1285,0	12,4
5	313	1,41	500	1307,0	12,7

Es sollten dann R_f gegen B aufgetragen werden, sowie ΔR über B :

R_f über B



Delta R über B



2 Messungen an einer Metallhallsonde

2.1 Bestimmung der Hallkonstante R_H sowie von n_{Au} und ξ_{Au}

2.1.1 Hallspannung über Magnetfeld $U_H(B)$ (statistischer Fehler)

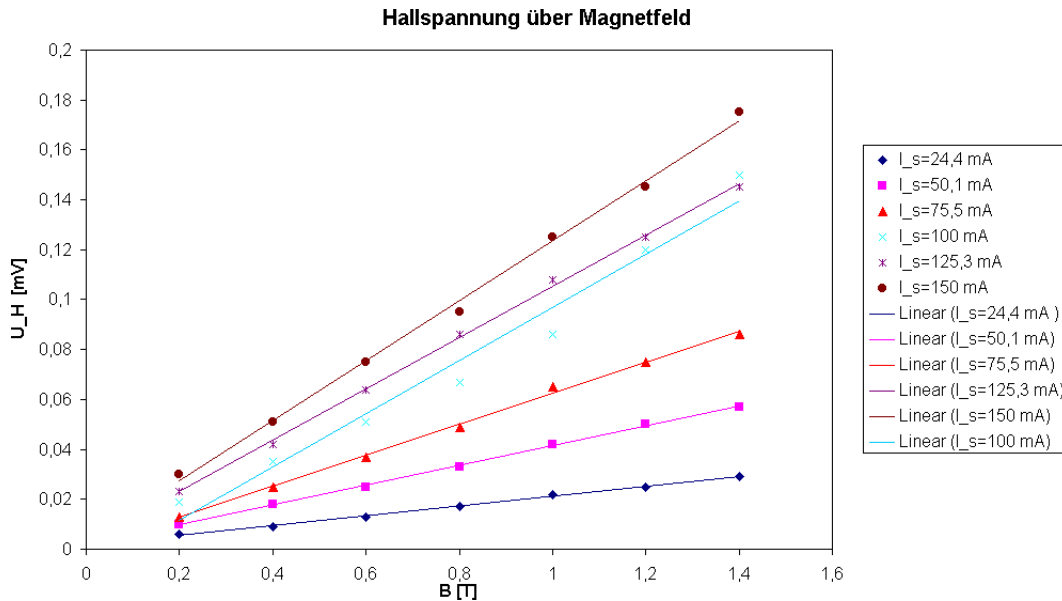
Die Goldhallsonde, die hier als Beispiel für eine Hallsonde aus einem Metall dient, wurde selbst hergestellt, indem Gold durch eine Blende auf eine Unterlage aufgedampft wurde. Nur so konnte die geringe Dicke $d = 61 \pm 3 \text{ nm}$ erreicht werden. Die Breite der Hallsonde ist $b = 9,0 \pm 0,1 \text{ mm}$. Damit die Hallspannung fehlerfrei meßbar ist, müssen die Anschlüsse, an denen die Hallspannung an der Hallsonde abgegriffen wird, sich exakt gegenüberstehen. Schon bei kleinen Abweichungen in Richtung des Steuerstromes würde der Strom I_S zwischen den beiden Anschlüssen eine Spannung erzeugen, die sich der Hallspannung überlagert. Dies erklärt sich daher, dass zwischen Eingang und Ausgang der Hallsonde eine Spannung anliegt, also eine Potentialdifferenz herrscht. Da die beiden Anschlüsse für die Hallspannung verschoben sind, entsteht eben auch zwischen diesen eine Potentialdifferenz. Da bei der Herstellung solche Geometriefehler nicht zu vermeiden sind, muß diese Fehlerquelle auf andere Weise beseitigt werden: Auf einer Seite der Hallsonde befinden sich zwei Anschlüsse, die zu dem gegenüberliegenden symmetrisch angeordnet sind. Werden diese zwei Anschlüsse an ein Potentiometer (oder auch zwei Potentiometer für den Grob- und den Feinabgleich) gelegt, so kann ein 'elektrischer Geometrieabgleich' vorgenommen werden. Ohne Magnetfeld darf keine Hallspannung zu messen sein. Also muß bei jeder Änderung von I_S die Hallspannung bei $B = 0 \text{ T}$ mit den Potentiometern auf $U_H = 0 \text{ V}$ eingestellt werden.

Es wird nun folgendermaßen vorgegangen:

- Zuerst wird der Steuerstrom I_S der Sonde eingestellt.
- Nun wird oben beschriebener Nullabgleich vorgenommen, d.h., dass das Voltmeter auf 0T eingestellt wird, da ja noch gar kein Feld angelegt ist.

- Nun wird der Strom für die Spulen hochgeregelt und das B -Feld eingestellt, d.h. man stellt den Strom auf die Werte ein, die in Aufgabe 1 gemessen wurden und die das B -Feld der gewünschten Größe erzeugen.
- Nun liest man die Hallspannung U_H am Voltmeter ab.
- Neuer Durchgang mit neuer Stromstärke I .
- Ist man am oberen Rand der Möglichkeiten für I angelangt, verändert man I_S und beginnt nach beschriebenem Schema von neuem.

Somit ergeben sich für variiertes Magnetfeld B und Steuerstrom I_S mehrere Messreihen, aus denen sich dann weitere Größen ableiten lassen. Zunächst möchten wir die Hallspannung U_H über dem Magnetfeld B auftragen. Die Tabelle mit den Messwerten folgt später, zunächst möchten wir das Schaubild betrachten - deutlich ist die Linearität von $U_H(B)$ erkennbar, weshalb wir mit Excel Ausgleichsgeraden einzeichneten:



Unter Zuhilfenahme des Computer-Algebra-Systems Maple (Rechnung dieses Versuchsteils siehe Anlage!) berechneten wir aus den Messwerten Steigung und y-Achsenabschnitt der Ausgleichsgeraden und deren Abweichungen. Hierbei wurden als y-Werte y_i die gemessenen Hallspannungen U_H und als x-Werte x_i das Magnetfeld B verwendet; die Anzahl der Messungen pro Messreihe betrug $N = 7$. Wie im Skript zur Fehlerrechnung gezeigt, errechnet sich damit die Steigung m der Ausgleichsgeraden aus folgender Formel:

$$m = \frac{N \cdot (\sum x_i y_i) - (\sum x_i) \cdot (\sum y_i)}{N \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (1)$$

Für den y-Achsenabschnitt b gilt, ebenfalls nach dem Fehlerskript:

$$b = \frac{(\sum x_i^2) \cdot (\sum y_i) - (\sum x_i) \cdot (\sum x_i y_i)}{N \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (2)$$

Aus den Werten für m und b lässt sich die Varianz folgendermaßen berechnen:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N-2} \sum (y_i - m \cdot x_i - b)^2 \quad (3)$$

Haben wir mit (3) die Varianz berechnet, lässt sich die Unsicherheit der Steigung σ_m und die Unsicherheit des y-Achsenabschnitts σ_b ermitteln:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{N \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \cdot N} \quad (4)$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{N \cdot (\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \cdot \sum x_i^2} \quad (5)$$

Die Relativwerte erhält man, indem man die Unsicherheit durch den ermittelten Wert teilt:

$$\sigma_m (rel.) = \frac{\sigma_m}{m} \quad (6)$$

$$\sigma_b (rel.) = \frac{\sigma_b}{b} \quad (7)$$

In der Vorbereitung haben wir folgende Formel zur Bestimmung der Hallkonstante R_H aus m und b hergeleitet:

$$R_H = \frac{m \cdot d}{I_S} + \frac{b}{B \cdot I_S} \quad (8)$$

Aus der unten stehenden Tabelle wird jedoch ersichtlich, dass die y-Achsenabschnitte b gegenüber der Steigung m sehr klein bzw. fast Null sind (und zudem der Messfehler meist $>20\%$ ist, siehe Maple-Worksheet). Deshalb setzen wir $b = 0$ und erhalten als Formel für die Hallkonstante R_H :

$$R_H = \frac{m \cdot d}{I_S} \quad (9)$$

Die Dicke der Goldplättchens beträgt $d = 61 \text{ nm}$. Mit der Formel für die Fehlerfortpflanzung beträgt der Fehler von R_H :

$$\sigma_{R_H} = \sqrt{\sigma_m^2 \left(\frac{\partial R_H}{\partial m} \right)^2} = \sqrt{\sigma_m^2 \left(\frac{d}{I_S} \right)^2} = \sigma_m \cdot \frac{d}{I_S} \quad (10)$$

I_S [mA]	B [T]	$I_{Sp.}$ [A]	U_H [mV]	Größe	Einheit	Wert	Herkunft
24,4	0,2	0,45	0,006	Steigung m	mV/T	0,0196	berechnet mit (1)
24,4	0,4	0,8	0,009	σ_m (abs.)	mV/T	0,000479	berechnet mit (4)
24,4	0,6	1,2	0,013	σ_m (rel.)		2,4%	berechnet mit (6)
24,4	0,8	1,6	0,017	\Rightarrow y-Achsenabschnitt b	mV	0,00157	berechnet mit (2)
24,4	1	2,2	0,022	R_H	$10^{-11} \frac{m^3}{As}$	4,90	berechnet mit (9)
24,4	1,2	3,1	0,025	σ_{R_H} (abs.)	$10^{-11} \frac{m^3}{As}$	0,12	berechnet mit (10)
24,4	1,4	4,9	0,029				
50,1	0,2	0,45	0,01	Steigung m	mV/T	0,0396	berechnet mit (1)
50,1	0,4	0,8	0,018	σ_m (abs.)	mV/T	0,00053	berechnet mit (4)
50,1	0,6	1,2	0,025	σ_m (rel.)		1,3%	berechnet mit (6)
50,1	0,8	1,6	0,033	\Rightarrow y-Achsenabschnitt b	mV	0,001857	berechnet mit (2)
50,1	1	2,2	0,042	R_H	$10^{-11} \frac{m^3}{As}$	4,82	berechnet mit (9)
50,1	1,2	3,1	0,05	σ_{R_H} (abs.)	$10^{-11} \frac{m^3}{As}$	0,06	berechnet mit (10)
50,1	1,4	4,9	0,057				
75,5	0,2	0,45	0,013	Steigung m	mV/T	0,06196	berechnet mit (1)
75,5	0,4	0,8	0,025	σ_m (abs.)	mV/T	0,00131	berechnet mit (4)
75,5	0,6	1,2	0,037	σ_m (rel.)		2,1%	berechnet mit (6)
75,5	0,8	1,6	0,049	\Rightarrow y-Achsenabschnitt b	mV	0,00043	berechnet mit (2)
75,5	1	2,2	0,065	R_H	$10^{-11} \frac{m^3}{As}$	5,01	berechnet mit (9)
75,5	1,2	3,1	0,075	σ_{R_H} (abs.)	$10^{-11} \frac{m^3}{As}$	0,11	berechnet mit (10)
75,5	1,4	4,9	0,086				
100	0,2	0,45	0,019	Steigung m	mV/T	0,1068	berechnet mit (1)
100	0,4	0,8	0,035	σ_m (abs.)	mV/T	0,0082	berechnet mit (4)
100	0,6	1,2	0,051	σ_m (rel.)		7,7%	berechnet mit (6)
100	0,8	1,6	0,067	\Rightarrow y-Achsenabschnitt b	mV	0,01	berechnet mit (2)
100	1	2,2	0,086	R_H	$10^{-11} \frac{m^3}{As}$	6,51	berechnet mit (9)
100	1,2	3,1	0,12	σ_{R_H} (abs.)	$10^{-11} \frac{m^3}{As}$	0,50	berechnet mit (10)
100	1,4	4,9	0,15				
125,3	0,2	0,45	0,023	Steigung m	mV/T	0,1029	berechnet mit (1)
125,3	0,4	0,8	0,042	σ_m (abs.)	mV/T	0,0016	berechnet mit (4)
125,3	0,6	1,2	0,064	σ_m (rel.)		1,6%	berechnet mit (6)
125,3	0,8	1,6	0,086	\Rightarrow y-Achsenabschnitt b	mV	0,00243	berechnet mit (2)
125,3	1	2,2	0,108	R_H	$10^{-11} \frac{m^3}{As}$	5,01	berechnet mit (9)
125,3	1,2	3,1	0,125	σ_{R_H} (abs.)	$10^{-11} \frac{m^3}{As}$	0,08	berechnet mit (10)
125,3	1,4	4,9	0,145				
149,4	0,2	0,45	0,03	Steigung m	mV/T	0,12	berechnet mit (1)
149,4	0,4	0,8	0,051	σ_m (abs.)	mV/T	0,0029	berechnet mit (4)
149,4	0,6	1,2	0,075	σ_m (rel.)		2,4%	berechnet mit (6)
149,4	0,8	1,6	0,095	\Rightarrow y-Achsenabschnitt b	mV	0,00329	berechnet mit (2)
149,4	1	2,2	0,125	R_H	$10^{-11} \frac{m^3}{As}$	4,90	berechnet mit (9)
149,4	1,2	3,1	0,145	σ_{R_H} (abs.)	$10^{-11} \frac{m^3}{As}$	0,12	berechnet mit (10)
149,4	1,4	4,9	0,175				

Somit erhalten wir für die einzelnen Messreihen folgende Werte für R_H (mit Abweichung σ_{R_H}):

I_S [mA]	R_H [$10^{-11} \frac{m^3}{As}$]	σ_{R_H} (abs.) [$10^{-11} \frac{m^3}{As}$]
24,4	4,9	0,12
50,1	4,82	0,06
75,5	5,01	0,11
100	6,51	0,5
125,3	5,01	0,08
149,4	4,9	0,12
Mittelwert:	5,19	0,17

Für die Hallkonstante R_H und ihre Unsicherheit σ_{R_H} ergeben sich also folgende Werte:

$$R_H = 5,19 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{As} \quad (11)$$

$$\sigma_{R_H} = 0,17 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{As} \quad (12)$$

Dies entspricht 3,18% Messungenauigkeit! In der Vorbereitung haben wir die Formeln für die Konzentration freier Elektronen in Gold n_{Au} und die mittlere Zahl freier Elektronen ξ_{Au} hergeleitet, die nachfolgend um die Fehlerfortpflanzungsrechnung ergänzt seien:

$$n_{Au} = \frac{1}{R_H \cdot e} \quad (13)$$

$$\sigma_{n_{Au}} = \sqrt{\sigma_{R_H}^2 \left(\frac{\partial n_{Au}}{\partial R_H} \right)^2} = \sqrt{\sigma_{R_H}^2 \left(-\frac{1}{R_H^2 \cdot e} \right)^2} \quad (14)$$

$$\xi_{Au} = \frac{n_{Au}}{N} \quad (\text{mit } N=5,88 \cdot 10^{28} \text{ Teilchen pro Kubikmeter, siehe Vorbereitung}) \quad (15)$$

$$\sigma_{\xi_{Au}} = \sqrt{\sigma_{n_{Au}}^2 \left(\frac{\partial \xi_{Au}}{\partial n_{Au}} \right)^2} = \sqrt{\sigma_{n_{Au}}^2 \left(\frac{1}{N} \right)^2} \quad (16)$$

Aus (13) und (14) ergibt sich:

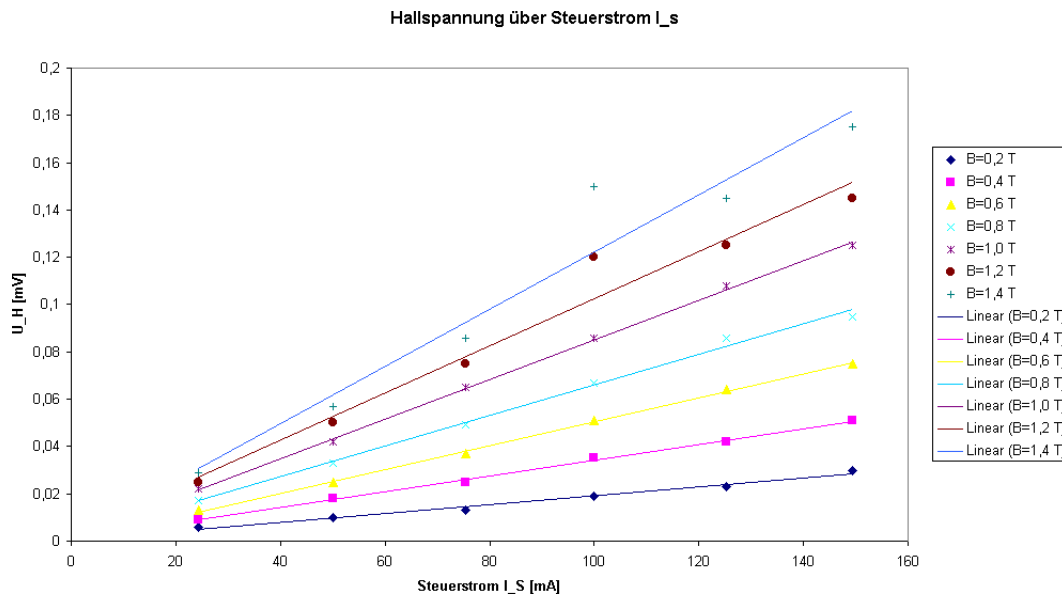
$$n_{Au} = 1,2 \pm 0,038 \cdot 10^{29} \frac{1}{m^3} \quad (17)$$

Mit (15) und (16) folgt:

$$\xi_{Au} = 2,05 \pm 0,07 \quad (18)$$

2.1.2 Hallspannung über Steuerstrom $U_H(I_S)$

Aus der großen Messwerttabelle von 2.1.1 kann man durch Umsortierung der Werte die Hallspannung über dem Steuerstrom I_S darstellen, wobei die Messreihen jeweils vom Magnetfeld B abhängig sind. Dies ist im folgenden Diagramm veranschaulicht, wobei zwischen U_H und I_S ebenfalls ein linearer Zusammenhang deutlich wird:



2.2 Leitfähigkeit und Elektronenbeweglichkeit in Gold (Gesamtfehler)

Auf der Goldhallsonde sind im Abstand $l = 29,0 \pm 0,1 \text{ mm}$ zwei weitere Anschlüsse angebracht. Mittels der Spannung U_r , die dort abfällt, kann (mit dem Steuerstrom I_S) der Widerstand des Leiterstücks zwischen den Anschlüssen ermittelt werden. Wir erhielten folgende Messwerte:

I_S [mA]	U_R [mV]	R [Ohm]
25,6	60	2,34
49,3	115	2,33
76	177	2,33
100,4	235	2,34
125,2	292	2,33
149,5	350	2,34

Der Mittelwert beträgt

$$R = 2,34 \Omega \quad (19)$$

Die Formel für die Standardabweichung des Mittelwerts \bar{x} lautet für n Messungen:

$$\sigma_m = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2} \quad (20)$$

Mit (20) gilt dann für den statistischen Fehler von R :

$$\sigma_R = 0,00224 \Omega \quad (21)$$

Dies entspricht 0,1% des Messwerts und soll für die folgende Rechnung als Fehler von R angenommen werden. Wir erhalten mit Hilfe der Angaben aus der Versuchsbeschreibung folgende Größen und zugehörige Fehler in der Zusammenfassung:

- $R = 2,34 \pm 0,00224 \Omega$ (statistischer Fehler)
- $l = 0,029 \pm 0,0001 \text{ m}$ (systematischer Fehler)
- $b = 0,009 \pm 0,0001 \text{ m}$ (systematischer Fehler)
- $d = 61 \pm 3 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ (systematischer Fehler)
- $R_H = 5,19 \pm 0,17 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{As}}$ (statistischer Fehler) [s. 2.1.1]

Im folgenden sollen statistische und systematische Fehler nicht mehr getrennt betrachtet werden, sondern einfach nur noch der Fehler σ_x für jede Größe x (entspricht dem Wert hinter \pm)!

Aus der Vorbereitung entnehmen wir die Formel für die elektrische Leitfähigkeit σ_{Au} :

$$\sigma_{Au} = \frac{l}{R \cdot b \cdot d} \quad (22)$$

Mittels Fehlerfortpflanzung ergibt sich der Fehler $\sigma_{\sigma_{Au}}$:

$$\sigma_{\sigma_{Au}} = \sqrt{\sigma_R^2 \left(\frac{\partial \sigma_{Au}}{\partial R} \right)^2 + \sigma_l^2 \left(\frac{\partial \sigma_{Au}}{\partial l} \right)^2 + \sigma_b^2 \left(\frac{\partial \sigma_{Au}}{\partial b} \right)^2 + \sigma_d^2 \left(\frac{\partial \sigma_{Au}}{\partial d} \right)^2} \quad (23)$$

$$= \sqrt{\sigma_R^2 \left(\frac{-l}{R^2 \cdot b \cdot d} \right)^2 + \sigma_l^2 \left(\frac{1}{R \cdot b \cdot d} \right)^2 + \sigma_b^2 \left(\frac{-l}{R \cdot b^2 \cdot d} \right)^2 + \sigma_d^2 \left(\frac{-l}{R \cdot b \cdot d^2} \right)^2} \quad (24)$$

Einsetzen der Werte in Formel (22) und Formel (24) liefert:

$$\sigma_{Au} = 22,6 \pm 1,14 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega \cdot \text{m}} \quad (25)$$

Wir erhalten also ca. 5% Messfehler. Wiederum aus der Versuchsvorbereitung stammt die folgende Formel für die Elektronenbeweglichkeit μ_{Au} , von der wir gleich mittels Fehlerfortpflanzung die Abweichung bestimmen wollen:

$$\mu_{Au} = \sigma_{Au} \cdot R_H \quad (26)$$

$$\sigma_{\mu_{Au}} = \sqrt{\sigma_{\sigma_{Au}}^2 \left(\frac{\partial \mu_{Au}}{\partial \sigma_{Au}} \right)^2 + \sigma_{R_H}^2 \left(\frac{\partial \mu_{Au}}{\partial R_H} \right)^2} \quad (27)$$

$$= \sqrt{\sigma_{\sigma_{Au}}^2 (R_H)^2 + \sigma_{R_H}^2 (\sigma_{Au})^2} \quad (28)$$

Einsetzen der Werte in (26) und (28) liefert:

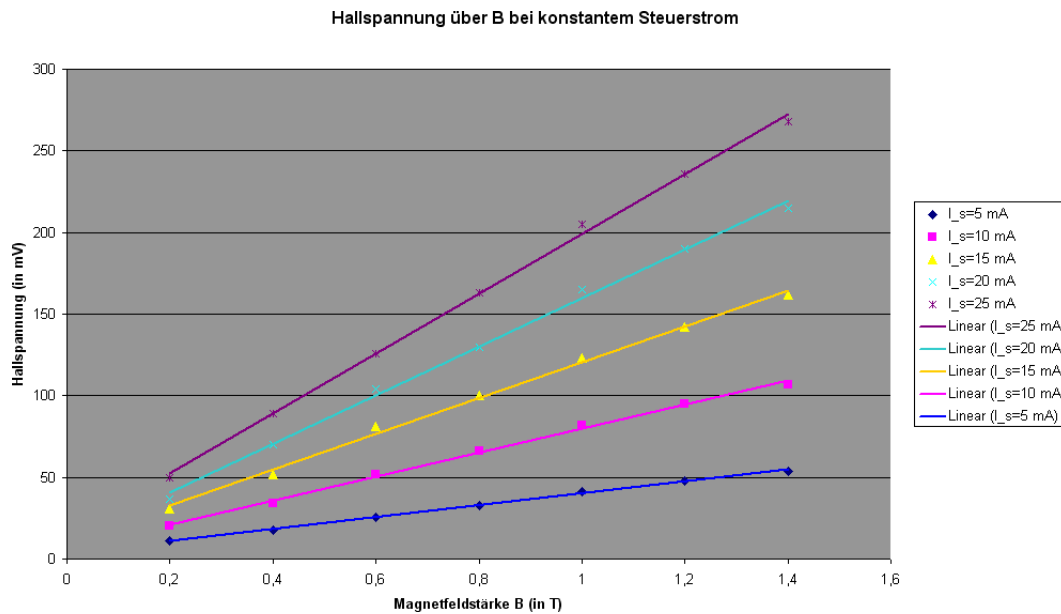
$$\mu_{Au} = 1,173 \pm 0,071 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{Vs} \quad (29)$$

3 Messungen an einer Metallhalbleitersonde

3.1 Bestimmung der Hallkonstante R_H sowie von n_{Au}

3.1.1 Hallspannung über Magnetfeld $U_H(B)$ (statistischer Fehler)

In diesem Versuchsteil führten wir die Messung analog zu 2.1.1 durch, nur dass statt des Goldplättchens ein InAs-Halbleiterelement als Hallsonde diente. Die Versuchsdurchführung unterschied sich lediglich dadurch, dass auf die Nullkalibrierung verzichtet werden konnte - woran das liegt, steht in der Vorbereitung. Zunächst zeigt das Diagramm ebenfalls einen linearen Zusammenhang von U_H und B auf:



Die Steigung der Ausgleichsgerade, deren Fehler und die Hallkonstante R_H samt Fehler wurden mit den Formeln aus 2.1.1 berechnet. Lediglich eine anderen Dicke $d = 2,5 \mu m$ wurde verwendet - abgesehen von der zusätzlichen Messgröße U_r , der Spannung über den Anschlusskontakten der Hallsonde.

I_S [mA]	B [T]	$I_{Sp.}$ [A]	U_H [mV]	U_r [V]	R [Ohm]	Größe	Einheit	Wert
5	0,2	0,45	11	0,14	28	Steigung m	mV/T	36,6
5	0,4	0,8	17,5	0,149	29,8	σ_m (abs.)	mV/T	0,728
5	0,6	1,2	25,5	0,162	32,4	σ_m (rel.)		2,0%
5	0,8	1,6	33	0,177	35,4	\Rightarrow y-Achsenabschnitt b	mV	3,57
5	1	2,2	41,5	0,198	39,6	R_H	$10^{-5} \frac{m^3}{As}$	1,83
5	1,2	3,1	47,5	0,212	42,4	σ_{RH} (abs.)	$10^{-5} \frac{m^3}{As}$	0,04
5	1,4	4,9	54	0,229	45,8			
10	0,2	0,45	20	0,279	27,9	Steigung m	mV/T	73,8
10	0,4	0,8	34	0,296	29,6	σ_m (abs.)	mV/T	1,75
10	0,6	1,2	52	0,327	32,7	σ_m (rel.)		2,4%
10	0,8	1,6	66	0,356	35,6	\Rightarrow y-Achsenabschnitt b	mV	6,14
10	1	2,2	82	0,393	39,3	R_H	$10^{-5} \frac{m^3}{As}$	1,85
10	1,2	3,1	95	0,426	42,6	σ_{RH} (abs.)	$10^{-5} \frac{m^3}{As}$	0,04
10	1,4	4,9	107	0,458	45,8			
15	0,2	0,45	31	0,422	28,1	Steigung m	mV/T	109,82
15	0,4	0,8	52	0,446	29,7	σ_m (abs.)	mV/T	2,78
15	0,6	1,2	81	0,497	33,1	σ_m (rel.)		2,5%
15	0,8	1,6	100	0,537	35,8	\Rightarrow y-Achsenabschnitt b	mV	10,9
15	1	2,2	123	0,591	39,4	R_H	$10^{-5} \frac{m^3}{As}$	1,83
15	1,2	3,1	142	0,638	42,5	σ_{RH} (abs.)	$10^{-5} \frac{m^3}{As}$	0,05
15	1,4	4,9	162	0,69	46			
20	0,2	0,45	37	0,559	28,0	Steigung m	mV/T	149,1
20	0,4	0,8	70	0,599	30,0	σ_m (abs.)	mV/T	3,63
20	0,6	1,2	104	0,655	32,8	σ_m (rel.)		2,4%
20	0,8	1,6	130	0,711	35,6	\Rightarrow y-Achsenabschnitt b	mV	10,86
20	1	2,2	165	0,793	39,7	R_H	$10^{-5} \frac{m^3}{As}$	1,86
20	1,2	3,1	190	0,852	42,6	σ_{RH} (abs.)	$10^{-5} \frac{m^3}{As}$	0,05
20	1,4	4,9	215	0,918	45,9			
25	0,2	0,45	50	0,705	28,2	Steigung m	mV/T	183,4
25	0,4	0,8	89	0,75	30	σ_m (abs.)	mV/T	3,3
25	0,6	1,2	126	0,813	32,5	σ_m (rel.)		1,8%
25	0,8	1,6	163	0,888	35,5	\Rightarrow y-Achsenabschnitt b	mV	15,7
25	1	2,2	205	0,988	39,5	R_H	$10^{-5} \frac{m^3}{As}$	1,83
25	1,2	3,1	236	1,064	42,6	σ_{RH} (abs.)	$10^{-5} \frac{m^3}{As}$	0,03
25	1,4	4,9	268	1,148	45,9			

Für die Hallspannung ergibt sich hiermit:

I_S [mA]	R_H [$10^{-5} \frac{m^3}{As}$]	σ_{RH} (abs.) [$10^{-5} \frac{m^3}{As}$]
5	1,83	0,04
10	1,85	0,04
15	1,83	0,05
20	1,86	0,05
25	1,83	0,03
Mittelwert:	1,84	0,04

Also:

$$R_H = 1,84 \pm 0,04 \cdot 10^{-5} \frac{m^3}{As} \quad (30)$$

Damit beträgt die Ladungsträgerkonzentration:

$$n_{InAs} = \frac{1}{R_H \cdot e} \quad (31)$$

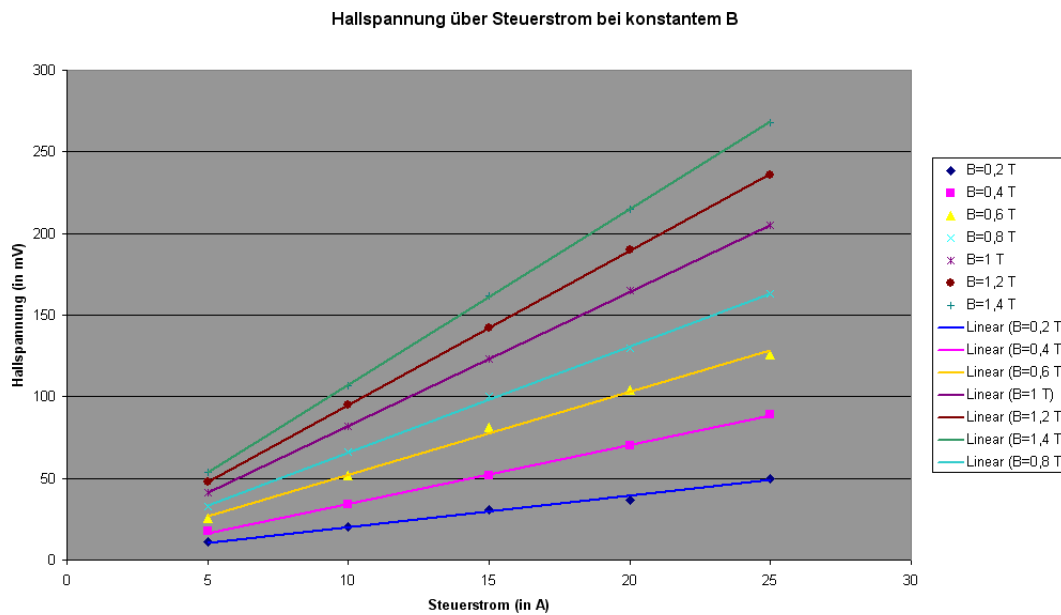
$$\sigma_{n_{InAs}} = \sqrt{\sigma_{R_H}^2 \left(\frac{\partial n_{InAs}}{\partial R_H} \right)^2} = \sqrt{\sigma_{R_H}^2 \left(-\frac{1}{R_H^2 \cdot e} \right)^2} \quad (32)$$

$$\Rightarrow n_{InAs} = 3,4 \pm 0,07 \cdot 10^{23} \frac{1}{m^3} \quad (33)$$

Die Konzentration freier Elektronen in der Halbleitersonde ist somit deutlich kleiner als die von Gold ($n_{Au} = 1,2 \cdot 10^{29}$), und zwar um ganze 6 Größenordnungen! Dies war zu erwarten, handelt es sich bei Gold ja um einen Leiter, dessen Leitungseigenschaft durch eine große Zahl freier Elektronen hervorgerufen wird - während InAs, wie der Name schon sagt, ein „Halbleiter“ ist.

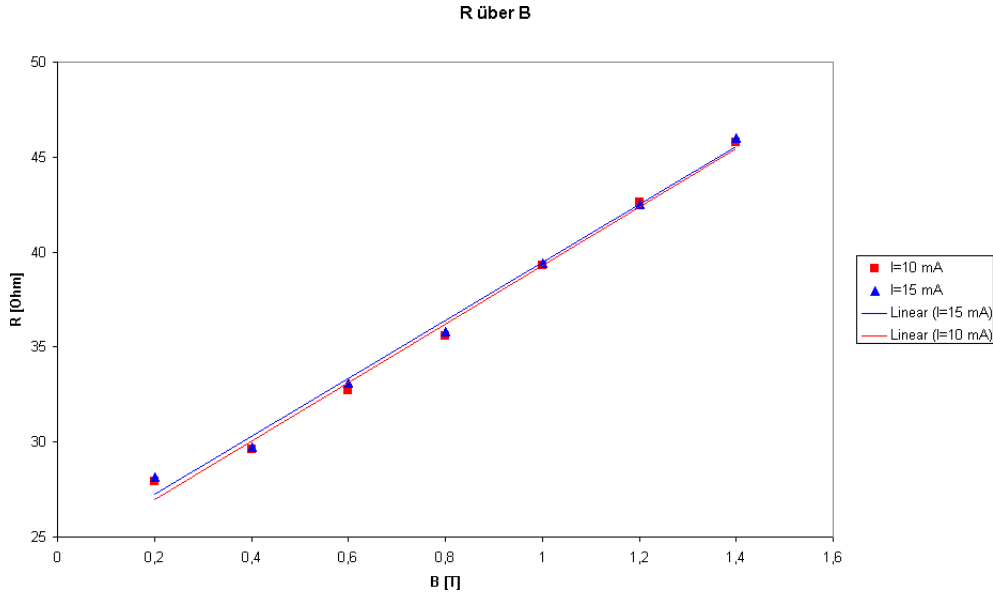
3.1.2 Hallspannung über Steuerstrom $U_H(I_S)$

Aus der Skizze ist ebenfalls ein linearer Zusammenhang ersichtlich:



3.2 Abhängigkeit des Hallwiderstandes vom Magnetfeld (Gesamtfehler)

In der Messwertetabelle in 3.1.1 sind die Spannungen U_r , die wir an den Anschlusskontakten der Halbleitersonde gemessen haben, mit notiert. Geteilt durch die Steuerstromstärke I_S ergibt sich der Widerstand $R(B)$, dessen Kurven sich mit der Steuerstromstärke I_S als Parameter (ich habe zwei ausgewählt) wie folgt darstellen:



Deutlich ist erkennbar, dass der Widerstand R vom Magnetfeld B abhängt, wie dies in Aufgabe 1 der Fall war. Bei der Goldhallsonde in Aufgabe 2 beobachteten wir diesen Effekt nicht, R war dort von B unabhängig. Dies muss an der besonderen Struktur der in Aufgabe 1 und 3 verwendeten Materialien liegen: zum einen die Kurzschlussbrücken in der Feldplatte, die die Abhängigkeit des Widerstands vom Magnetfeld verursachen und zum anderen die Struktur des Halbleiters in Aufgabe 3. Leider konnte der Wert für die relative Abweichung des Widerstands nicht berechnet werden, da vergessen wurde, den Wert der Spannung im feldfreien Fall zu messen.

Zum Schluss soll noch die Elektronenbeweglichkeit μ_{InAs} bestimmt werden. Hierzu sammeln wir zunächst die benötigten Größen (Angaben auf dem Aufgabenblatt, Messwerte von oben), wobei wir die Werte für $B = 1T$ verwenden möchten. Zuerst ist ein Mittelwert für den Widerstand R bei 1 Tesla gesucht (bestimmt aus einigen Werten aus der Messtabelle), anschließend die Kenndaten der Halbleitersonde.

I_S [mA]	R [Ohm]
5	39,6
10	39,3
15	39,4
20	39,7
25	39,5

- $R = 39,5 \pm 0,07 \Omega$ [Mittelwert der obigen Tabelle, Formel (20)] (statistischer Fehler)
- $l = 0,003 \pm 0,00005 \text{ m}$ (systematischer Fehler)
- $b = 0,0015 \pm 0,00005 \text{ m}$ (systematischer Fehler)
- $d = 2,5 \pm 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ (systematischer Fehler)
- $R_H = 1,84 \pm 0,04 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{As}}$ (statistischer Fehler) [s. 3.1.1]

Diese neuen Werte in die Formeln (22) und (24) eingesetzt ergibt für σ_{InAs} (wieder unter der Voraussetzung, alle Fehler nicht getrennt in systematisch und statistisch zu betrachten):

$$\sigma_{InAs} = 20,3 \pm 4,1 \cdot 10^3 \frac{1}{\Omega \cdot \text{m}} \quad (34)$$

Formel (26) und (28) liefert dann für μ_{InAs} :

$$\mu_{InAs} = 0,374 \pm 0,076 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}} \quad (35)$$

Zunächst einmal lässt sich feststellen, dass der Fehler mit 20% deutlich größer ist als bei der Messung der Gold-Hallsonde (Fehler von μ_{Au} : 6%). Die Elektronenbeweglichkeit selbst ist allerdings in Indiumarsenid deutlich größer (ca. 2 Größenordnungen)!