

Versuch: P1-40

Geometrische Optik

- Auswertung -

Versuchsdurchführung: Montag, 31.10.2005

Inhaltsverzeichnis

1	Brennweiten-Bestimmung	2
1.1	Bestimmung der Brennweite einer Sammellinse	2
1.2	Brennweiten-Bestimmung mit dem Besselschen Verfahren	2
1.3	Brennweiten-Bestimmung eines Zweilinsensystems mit dem Abbéschen Verfahren	3
1.3.1	15,8 cm Linsenabstand im Zweilinsensystem	5
1.3.2	15,8 cm Linsenabstand im Zweilinsensystem (um 180° gedreht)	5
1.3.3	Auswertung von 1.3.1 und 1.3.2	6
1.3.4	11,2 cm Linsenabstand im Zweilinsensystem	6
1.3.5	11,2 cm Linsenabstand im Zweilinsensystem (um 180° gedreht)	6
1.3.6	Auswertung von 1.3.4 und 1.3.5	7
1.3.7	Bestimmung der Einzelbrennweiten	7
2	Aufbau optischer Instrumente	7
2.1	Fernrohr	7
2.1.1	Keplersches (astronomisches) Fernrohr	7
2.1.2	Galileisches Fernrohr	8
2.2	Dia-Projektor	8
2.3	Mikroskop	9

1 Brennweiten-Bestimmung

1.1 Bestimmung der Brennweite einer Sammellinse

Im ersten Versuchsteil maßen wir die Brennweite dreier verschiedener Linsen auf einfache Weise: Auf der optischen Bank brachten wir die Lampe, die zu untersuchende Linse und dahinter den Schirm an. Den Schirm verschoben wir so lange, bis der Lichtpunkt auf dem Schirm den kleinsten Durchmesser erreichte, und somit Brennpunkt bzw. Brennweite gefunden war. Das Ablesen des Abstandes erfolgte über die Skala auf der optischen Bank.

Um möglichst paralleles einfallendes Licht zu haben, führten wir den Versuch nur mit kleinen Brennweiten und einem großen Abstand von Linse und Lichtquelle durch.

Brennweite (cm) <i>Angabe auf Linse</i>	Brennweite (cm) <i>gemessen</i>	Abweichung
8	8,9	11,3%
5	5,5	10,0%
10	11,8	18,0%

Wie zu erwarten war die Messung des Abstandes durch direktes Ablesen nicht sehr genau, die Abweichung von der Angabe auf der Linse betrug jeweils über 10%, siehe Tabelle.

1.2 Brennweiten-Bestimmung mit dem Besselschen Verfahren

Das Besselsche Verfahren nutzt die Tatsache aus, dass es für einen festen Abstand e zwischen einem Gegenstand und dem Schirm genau zwei Positionen der Linse gibt, für die das Bild auf dem Schirm scharf erscheint. Wir verwandten eine Linse der Brennweite $f = 10$ cm und gingen zur experimentellen Bestimmung der Brennweite folgendermaßen vor:

1. Wir stellten den Abstand e zwischen Schirm und einem beleuchteten Dia als Gegenstand fest ein (Messreihe in 5-cm-Schritten)
2. Durch das Verschieben der Linse zwischen Schirm und Dia fanden wir die zwei Positionen, an denen das Bild auf dem Schirm scharf erschien. Die beiden Werte, x_1 und x_2 genannt, lasen wir an der optischen Bank ab (Bezugspunkt: Nullpunkt der optischen Bank).
3. Die Differenz von x_1 und x_2 ergibt den Abstand d der beiden „scharfen“ Positionen
4. Die gemessene Brennweite f errechnet sich mit der in der Vorbereitung hergeleiteten Formel $f = \frac{1}{4} \left(e - \frac{d^2}{e} \right)$.

Die Versuche wurden unter folgenden Bedingungen durchgeführt:

- Weißes Licht, inneres Linsengebiet

e (cm)	x_1 (cm)	x_2 (cm)	d (cm)	f (cm)
50	85,1	105,8	20,7	10,4
55	79,2	106,7	27,5	10,3
60	73,6	107,2	33,6	10,3
65	68,6	107,5	38,9	10,4
70	63	107,9	44,9	10,3

- Weißes Licht, äußeres Linsengebiet

e (cm)	x_1 (cm)	x_2 (cm)	d (cm)	f (cm)
50	84,5	106,7	22,2	10,0
55	78,8	107,5	28,7	10,0
60	73,3	108,1	34,8	10,0
65	68,1	108,2	40,1	10,1
70	62,4	108,5	46,1	9,9

- Rotes Licht, ganze Linse

e (cm)	x_1 (cm)	x_2 (cm)	d (cm)	f (cm)
50	84,7	106	21,3	10,2
55	79	106,9	27,9	10,2
60	73,3	107	33,7	10,3
65	68	107,5	39,5	10,2
70	62,8	108,1	45,3	10,2

- Blaues Licht, ganze Linse

e (cm)	x_1 (cm)	x_2 (cm)	d (cm)	f (cm)
50	84,6	106,4	21,8	10,1
55	78,3	107	28,7	10,0
60	72,7	107,4	34,7	10,0
65	67,8	108	40,2	10,0
70	62,6	108,2	45,6	10,1

Die Mittelwerte der vier Versuchsreihen im Überblick:

Licht	Linsengebiet	\bar{f}
weiß	innen	10,3 cm
weiß	außen	10,0 cm
rot	ganz	10,2 cm
blau	ganz	10,0 cm

Zunächst einmal lässt sich feststellen, dass mit maximal 3% Abweichung vom Wert $f = 10$ cm ein deutlich besseres Ergebnis als mit der Methode bei 1.1 erzielt wurde. Die Linsenfehler wirkten sich wie erwartet aus: Durch die sphärische Aberration liegt der Brennpunkt achsenferner Strahlen näher an der Linse als bei achsennahen Strahlen, so ist wie vorausgesagt der Wert des äußeren Linsengebiets mit 10,0 cm kleiner als der innen gemessene Brennpunkt (10,3 cm).

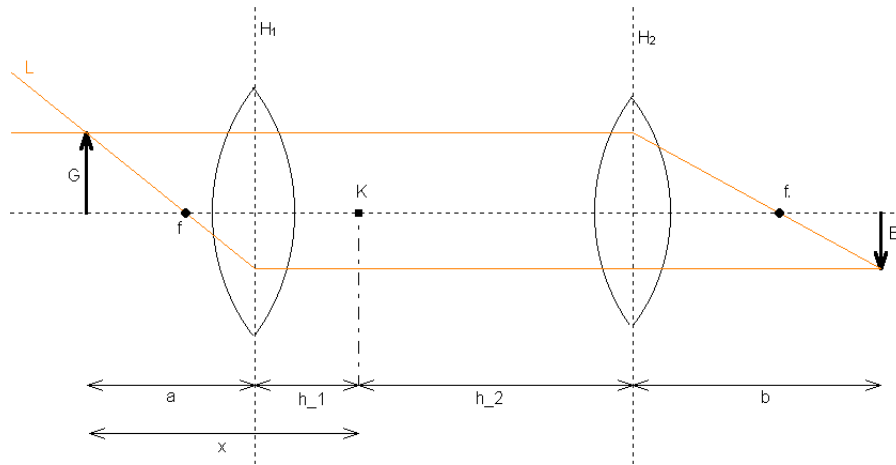
Auch die chromatische Aberration ließ sich experimentell bestätigen: das stärker gebrochene blaue Licht ergibt ebenfalls einen kleineren Wert als das weniger stark gebrochene rote Licht, wie aus der Tabelle ersichtlich.

1.3 Brennweiten-Bestimmung eines Zweilinsensystems mit dem Abbéschen Verfahren

Aufgabe war es, die unbekanntes Brennweiten zweier in einem Linsensystem vereinigten Linsen herauszufinden. Hierzu gingen wir folgendermaßen vor:

1. Auf der optischen Bank befestigten wir das Dia mit Millimeter-Gitter, das Zweilinsensystem und den Schirm
2. Als Bezugspunkt K wählten wir das Stativ des Zweilinsensystems
3. Für verschiedene Abstände x des Dias vom Linsensystem (bzw. dessen Bezugspunkt K) suchten wir jeweils die Schirm-Position, für die das Millimeter-Raster auf dem Schirm scharf abgebildet wurde. Mit dem Lineal bestimmten wir, wie groß zehn Linien des Millimeter-Dias auf dem Schirm abgebildet wurden und erhielten so die Bildgröße, aus der sich (geteilt durch die Gegenstandsgröße, sprich 1 cm) die Vergrößerung $\gamma = \frac{B}{G}$ errechnete.
4. Anschließend führten wir die Messung mit um 180° gedrehtem Linsensystem noch einmal durch, um ausreichend Werte zur Bestimmung der Hauptebenen zu erhalten.

Obige Schritte führten wir für zwei Einstellungen des Linsensystems aus, also für zwei Abstände der beiden Linsen.



Zwischen x und $\frac{1}{\gamma}$ besteht ein linearer Zusammenhang, wie die folgenden Umformungen der Linsengleichung beweisen (a einsetzen, mit γ erweitern...):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (1)$$

$$\frac{a}{f} = 1 + \frac{a}{b} \quad (2)$$

$$\frac{a}{f} = 1 + \frac{1}{\gamma} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{a}{f} - 1 \quad (4)$$

Wie aus der Skizze ersichtlich, setzt sich x aus der Gegenstandsweite a und dem Abstand von K zur Hauptebene H_1 zusammen, also $x = a + h_1$. Daraus folgt mit $a = x - h_1$:

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{x - h_1}{f} - 1 \quad (5)$$

Nach x auflösen:

$$\frac{1}{\gamma} + 1 = \frac{x - h_1}{f} \quad (6)$$

$$f\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) = x - h_1 \quad (7)$$

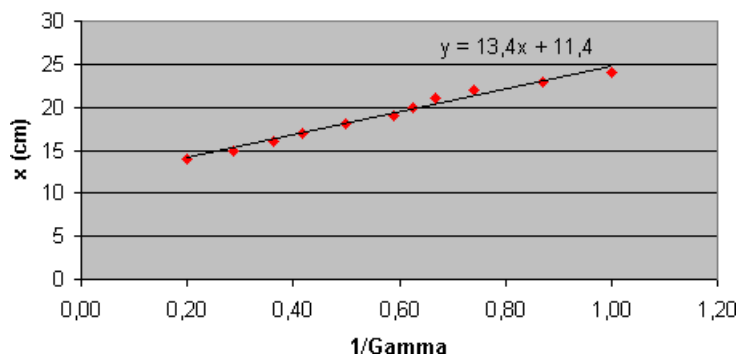
$$x = f\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) + h_1 \quad (8)$$

Demnach sollten die x -Werte aufgetragen über $\frac{1}{\gamma}$ in etwa eine Gerade ergeben. Der Messwert x_1 in den folgenden Tabellen ist der auf der optischen Bank abgelesene Abstand vom Nullpunkt, der abzüglich der Position von K (75 cm) den gesuchten Wert x ergab. Die Vergrößerung γ wurde wie oben beschrieben per Lineal bestimmt und anschließend der Kehrwert gebildet. Im Diagramm ist x über $\frac{1}{\gamma}$ aufgetragen und eine Ausgleichsgerade eingezeichnet, deren Gleichung im Diagramm vermerkt ist.

1.3.1 15,8 cm Linsenabstand im Zweilinsensystem

x_1 (cm)	x (cm)	γ	$\frac{1}{\gamma}$
89	14	5	0,20
90	15	3,5	0,29
91	16	2,75	0,36
92	17	2,4	0,42
93	18	2	0,50
94	19	1,7	0,59
95	20	1,6	0,63
96	21	1,5	0,67
97	22	1,35	0,74
98	23	1,15	0,87
99	24	1	1,00

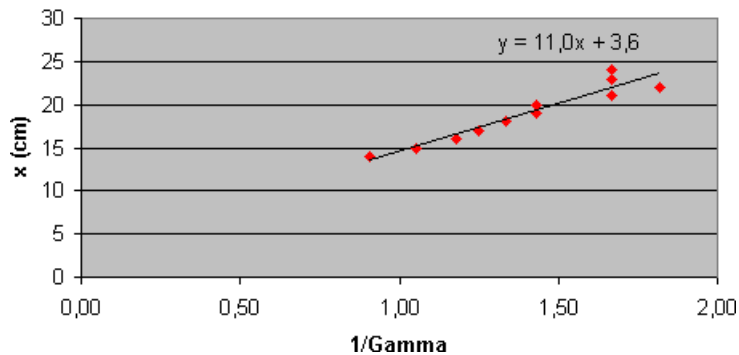
15,8 cm Linsenabstand



1.3.2 15,8 cm Linsenabstand im Zweilinsensystem (um 180° gedreht)

x_1 (cm)	x (cm)	γ	$\frac{1}{\gamma}$
89	14	1,1	0,91
90	15	0,95	1,05
91	16	0,85	1,18
92	17	0,8	1,25
93	18	0,75	1,33
94	19	0,7	1,43
95	20	0,7	1,43
96	21	0,6	1,67
97	22	0,55	1,82
98	23	0,6	1,67
99	24	0,6	1,67

15,8 cm Linsenabstand (180°)



1.3.3 Auswertung von 1.3.1 und 1.3.2

Aus Gleichung (8) folgt, dass die Brennweite f des ganzen Linsensystems der Steigung des $x - \frac{1}{\gamma}$ -Diagramms entspricht. Leider stimmen die beiden Ergebnisse (13,4 cm und 11 cm) der beiden Messreihen nicht exakt überein, deshalb gingen wir für die weiteren Rechnungen von einer Gesamtbrennweite von $f = 12,2$ cm (Mittelwert) für den Fall „15,8 cm Linsenabstand“ aus.

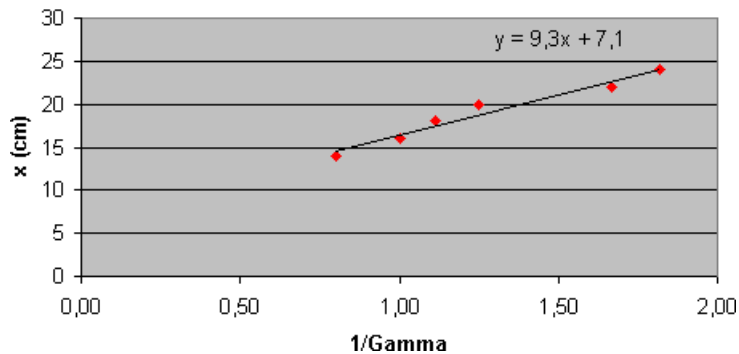
Aus (8) folgt des Weiteren, dass für den extrapolierten y-Achsenabschnitt A gelten muss: $A = f + h_1$ bzw. $A = f + h_2$. Mit den aus den Diagrammen abgelesenen y-Achsenabschnitten ließen sich so die Positionen der Hauptebenen bezüglich K bestimmen:

- $h_1 = 11,4 \text{ cm} - 12,2 \text{ cm} = -0,8 \text{ cm}$
- $h_2 = 3,6 \text{ cm} - 12,2 \text{ cm} = -8,6 \text{ cm}$

1.3.4 11,2 cm Linsenabstand im Zweilinsensystem

x_1 (cm)	x (cm)	γ	$\frac{1}{\gamma}$
89	14	1,25	0,80
91	16	1	1,00
93	18	0,9	1,11
95	20	0,8	1,25
97	22	0,6	1,67
99	24	0,55	1,82

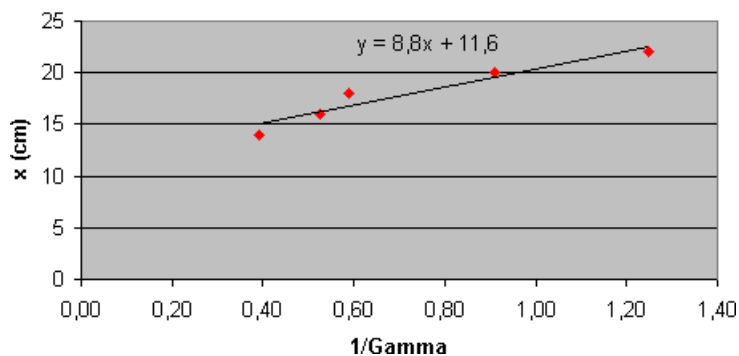
11,2 cm Linsenabstand



1.3.5 11,2 cm Linsenabstand im Zweilinsensystem (um 180° gedreht)

x_1 (cm)	x (cm)	γ	$\frac{1}{\gamma}$
89	14	2,55	0,39
91	16	1,9	0,53
93	18	1,7	0,59
95	20	1,1	0,91
97	22	0,8	1,25

11,2 cm Linsenabstand (180°)



1.3.6 Auswertung von 1.3.4 und 1.3.5

Mit 9,3 cm und 8,8 cm lagen die Steigungen (bzw. Messwerte für die Brennweite f) diesmal näher beieinander; die weitere Rechnung erfolgte mit dem Mittelwert $f = 9,05$ cm. Die Positionen der Hauptebenen bezüglich K ergaben sich zu $h_1 = -1,95$ cm und $h_2 = 2,55$ cm (Rechenweg siehe 1.3.3).

1.3.7 Bestimmung der Einzelbrennweiten

In der Zusammenfassung seien noch einmal folgende Ergebnisse der vorangegangenen Unterabschnitte zusammengefasst und diese Bezeichnungen eingeführt:

- Für den Linsenabstand $a_1 = 15,8$ cm wurde die Brennweite $f_1 = 12,2$ cm gemessen
- Für den Linsenabstand $a_2 = 11,2$ cm wurde die Brennweite $f_2 = 9,05$ cm gemessen

Mit der Formel

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_a} + \frac{1}{f_b} - \frac{a}{f_a f_b}$$

ergeben sich aus den f_i, a_i die Einzelbrennweiten $f_{a,b}$ als Lösungen der folgenden quadratischen Gleichung:

$$f_{a,b}^2 + \frac{f_2 a_2 - f_1 a_1}{f_1 - f_2} \cdot f_{a,b} + f_1 f_2 \frac{a_1 - a_2}{f_1 - f_2} = 0$$

Mangels Taschenrechners lösten wir diese Gleichung mit Maple und erhielten für die beiden Brennweiten: $f_a = 21,5$ cm und $f_b = 7,5$ cm, Quellcode siehe unten.

```
> restart;
> f1:=12.2;                               f1 = 12.2
> f2:=9.05;                                f2 = 9.05
> a1:=15.8;                                a1 = 15.8
> a2:=11.2;                                a2 = 11.2
> fab^2+(f2*a2-f1*a1)/(f1-f2)*fab+f1*f2*(a1-a2)/(f1-f2)=0;
> solve(%,fab);                            fab^2 - 29.01587302, fab + 161.2336508 = 0
                                           21.52552662, 7.490346398
```

2 Aufbau optischer Instrumente

2.1 Fernrohr

2.1.1 Keplersches (astronomisches) Fernrohr

Auf der transportablen „kleinen optischen Bank“ brachten wir zwei Konvexlinsen ($f_1 = 30$ cm und $f_2 = 5$ cm) im Abstand $d = f_1 + f_2 = 35$ cm an. Beim Blick durchs Okular (f_2) war das Bild wie erwartet um 180° gedreht und seitenverkehrt. Die Vergrößerung, rechnerisch

$$\gamma = \frac{f_1}{f_2} = 6$$

überprüften wir folgendermaßen: an die Tafel des Versuchsraumes malten wir zwei Striche, 3cm und 18cm lang. Blickten wir mit dem einen Auge durchs Fernrohr und mit dem anderen direkt auf die Tafel, so waren der kleine Strich im Okular und der große Strich in Natura in etwa gleich groß! Allerdings eignete sich diese Methode nur für eine sehr grobe Überprüfung der Vergrößerung.

2.1.2 Galileisches Fernrohr

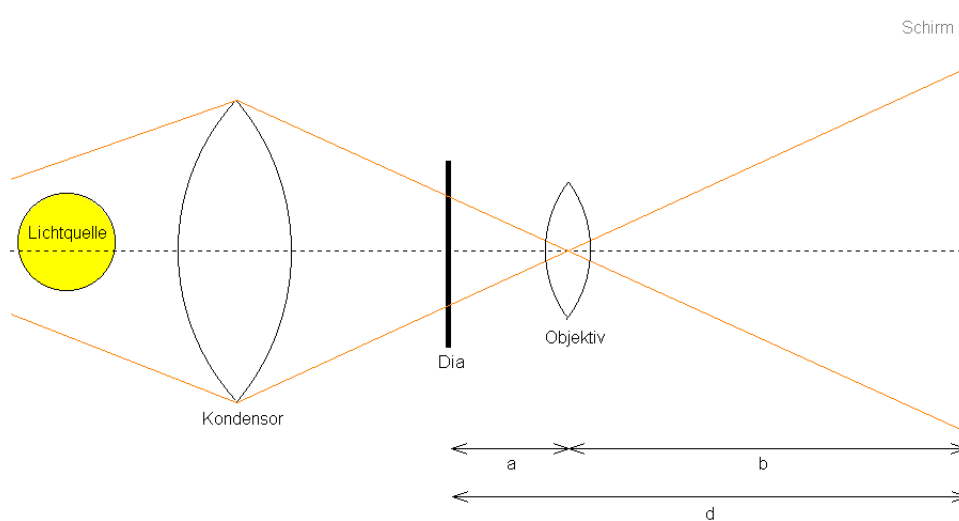
Anschließend bauten wir das keplersche Fernrohr zum Galileischen um: hierzu ersetzten wir die Sammellinse mit $f_2 = 5 \text{ cm}$ durch eine bikonkave Linse mit der gleichen Brennweite. Den Abstand der beiden Linsen stellten wir auf $d = f_1 - f_2 = 25 \text{ cm}$ ein und erhielten so ein aufrechtes Bild in ebenfalls 6-facher Vergrößerung (Kontrolle der Vergrößerung wie in 2.1.1). Mit dieser Anordnung ließ sich auch der Hinweiszettel am anderen Ende des Raumes problemlos entziffern.



Historisches Fernrohr des Galilei

2.2 Dia-Projektor

Die Aufgabenstellung forderte die Konstruktion eines „Dia-Projektors“, der das Bild in 1,5m Entfernung um das zehnfache vergrößert an die Wand projiziert. Da die optische Bank hierfür zu kurz war, diente die Wand der Versuchskammer als Schirm, so dass die 1,5m erreicht werden konnten. Der Aufbau erfolgte genau wie in der untenstehenden Skizze, als Kondensator diente eine Konvexlinse mit $f = 30 \text{ cm}$, die in 30cm Abstand zum Objektiv aufgestellt wurde und das Bild deutlich erhellte.



Mit einer Sammellinse mit $f = 15 \text{ cm}$ als Objektiv maßen wir per Lineal folgende Werte, die Vergrößerung γ errechnete sich anschließend aus dem Quotienten

$$\gamma = \frac{\text{Bildhoehe}}{\text{Gegenstandshoehe}}$$

Höhe Dia	Höhe Bild	Vergrößerung γ
2,4 cm	18,3 cm	7,6

Die erforderliche Vergrößerung ($\gamma = 10$) war somit noch nicht erreicht, deshalb führten wir den Versuch mit der $f = 10 \text{ cm}$ -Konvexlinse als Objektiv erneut durch. Ergebnis:

Höhe Dia	Höhe Bild	Vergrößerung γ
2,4 cm	30,3 cm	12,6

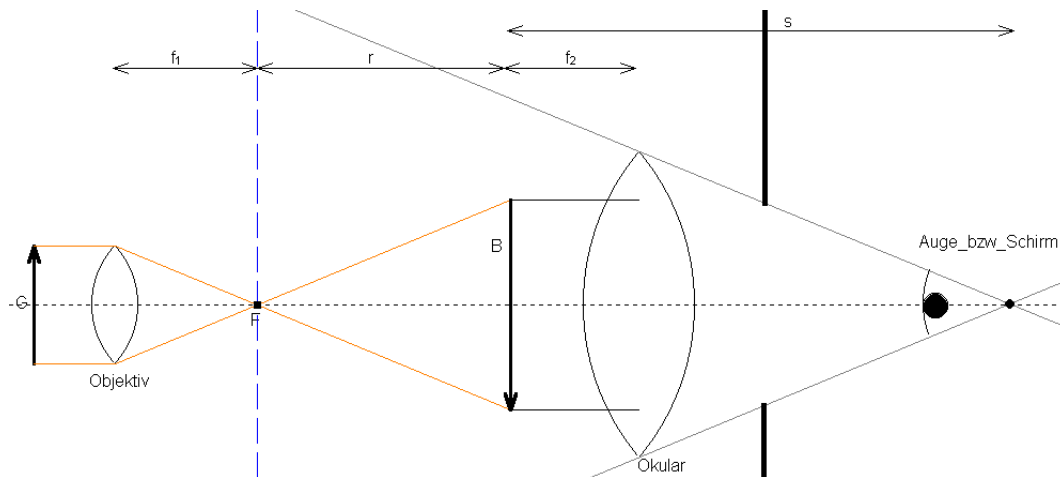
Die rechnerische Vergrößerung in diesem Fall (Bildweite $b = 140$ cm, Gegenstandsweite $g = 10$ cm $\Rightarrow \gamma = \frac{b}{g} = 14$) weicht zwar um 10% vom gemessenen Wert ab, was aber angesichts der ungenauen Messung des Abstands Wand- bzw. Schirm-Linse nicht verwunderlich ist (bedingt dadurch, dass die optische Bank längenmäßig nicht ausreichte).

2.3 Mikroskop

Wie das Keplersche Fernrohr besteht auch das Mikroskop aus zwei Sammellinsen. Das Objektiv projiziert ein virtuelles, stark vergrößertes Bild in die Ebene des Okulars. Durch das Okular hindurch, das hier wieder als „Lupe“ fungiert, kann dann das virtuelle Bild vergrößert betrachtet werden. Dementsprechend brachten wir folgende Gerätschaften auf der optischen Bank an:

	Schirm bzw. Auge	Linse $f_2 = 5$ cm Okular	Linse $f_1 = 6,5$ cm Objektiv	Dia Gegenstand
Abstand vom Nullpunkt der optischen Bank	28,2 cm	60,5 cm	113,9 cm	121,5 cm

[Aufbau in der folgenden Skizze von rechts nach links]



Die Vergrößerung des Mikroskops berechnet sich nach folgender Formel:

$$\gamma = \frac{s \cdot r}{f_1 \cdot f_2}$$

wobei

- s = Entfernung virtuelles Bild - Auge (bzw. Schirm), also berechnet durch die Formel „Okular - Schirm + f_2 “ mit den Werten aus obiger Tabelle.
- r = Entfernung der beiden Brennpunkte, sprich „Objektiv - Okular - $f_1 - f_2$ “

Die gemessenen Werte (notiert in obiger Tabelle) ergeben $s = 37,3$ cm und $r = 41,9$ cm. Eingesetzt in die Formel für die Vergrößerung ergibt sich ein theoretischer Wert von $\gamma = 48$. Bei der Untersuchung eines Dias mit Millimeter-Gittermaßen wir auf dem Schirm einen Abstand der einzelnen Striche von 3,5 cm. Das ist zwar eine Abweichung von ca. 27% zwischen Theorie und Praxis, doch bei einer immerhin 35-fachen Vergrößerung wirken sich auch kleinere Fehler (Ableseungenauigkeiten, Linsenfehler etc.) relativ stark aus.