

Versuch: P1-14

# Galvanometer

- Vorbereitung -

**Vorbemerkung**

Ein Galvanometer ist ein Messinstrument, mit dem sich sehr kleine Spannungen und Ströme messen lassen. Es besteht aus einer drehbar in einem Permanentmagneten gelagerten Spule, durch die der zu messende Strom fließt. Durch das Magnetfeld erfahren die bewegten Elektronen in der Spule eine Lorentzkraft, die eine mechanische Drehung der Spule bewirkt. Eine Feder oder ein Torsionsfaden hemmt diese Drehung, so dass sich die Drehung proportional zum durch die Spule fließenden Strom verhält - sie ist also ein Maß für diesen Strom und lässt sich mittels Spiegel und Laserstrahl sehr fein auf eine Skala projizieren. Dabei ist anzustreben, dass die Dämpfung möglichst dem aperiodischen Grenzfall entspricht - im Schwingfall pendelt der „Zeiger“ stark und im Kriechfall dauert es unter Umständen sehr lange, bis das System den tatsächlichen Messwert anzeigt.

**Inhaltsverzeichnis**

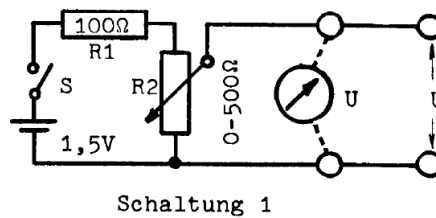
|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Vorexperimente</b>  | <b>2</b> |
| <b>2</b> | <b>Statische Eigenschaften des Galvanometers</b>   | <b>2</b> |
| 2.1      | Innenwiderstand und Stromempfindlichkeit . . . . .   | 2        |
| 2.2      | Brückenschaltung . . . . .   | 3        |
| 2.2.1    | Brücke offen . . . . .   | 3        |
| 2.2.2    | Brücke geschlossen . . . . .   | 4        |
| 2.3      | Statische Spannungsempfindlichkeit . . . . .   | 4        |
| <b>3</b> | <b>Dämpfungsverhältnis und Schwingungsdauer</b>  | <b>5</b> |
| <b>4</b> | <b>Kurze Stromstöße</b>  | <b>6</b> |
| 4.1      | Ballistische Empfindlichkeit bei minimaler Dämpfung ( $R_a \rightarrow \infty$ ) . . . . . | 6        |
| 4.2      | Ballistische Empfindlichkeit für $R_a = 1000 \Omega$ . . . . .                             | 6        |
| 4.3      | Ballistische Empfindlichkeit nahe Grenzdämpfung ( $R_a = 330 \Omega$ ) . . . . .           | 7        |
| 4.4      | Fluxmetrische Empfindlichkeit ( $R_a = 33 \Omega$ ) . . . . .                              | 7        |
| 4.5      | Warum ballistische Messungen? . . . . .  | 7        |

# 1 Vorexperimente

- Dass ein Galvanometer schon auf kleinste Ströme und Spannungen reagiert, lässt sich anschaulich zeigen, in dem man die beiden Anschlüsse in die Hand nimmt: das Messgerät zeigt sogar statische Aufladungen und körpereigene Ströme an!
- Schließt man einen Drehwiderstand ohne Spannungsquelle (!) an das Galvanometer an, so wird man voraussichtlich bei der Veränderung des Widerstands einen Effekt am Galvanometer beobachten können, denn: die Reibung, die bei der Drehung auftritt, löst freie Elektronen aus. Diese verursachen einen (wenn auch sehr geringen) Strom, den das Galvanometer wahrnehmen kann.
- Ohne mechanische Krafteinwirkung sollte bei einem Galvanometer ohne Anschluss der Lichtstrahl in Ruhe sein. Das Zuschalten eines Widerstands könnte dem ein oder anderen Elektron die Gelegenheit geben, sich zu bewegen, was sich am hochempfindlichen Galvanometer in einer veränderten Ruhelage niederschlagen kann.

## 2 Statische Eigenschaften des Galvanometers

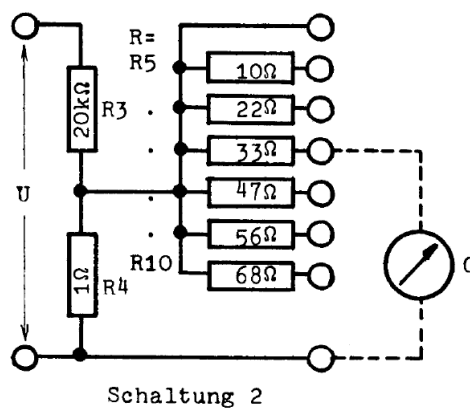
Die für diesen Versuch benötigte Versorgungsspannung  $U$  wird aus einer Spannungsteilerschaltung entnommen, die nach Schaltskizze 1 der Vorbereitungsmappe aufgebaut werden soll:



Aufgrund der in Aufgabe 1 deutlich gewordenen Sensibilität des Galvanometers muss grundsätzlich mit der Messung bei kleinster Spannung begonnen und der Lichtzeiger des Galvanometers ständig im Blick behalten werden.

### 2.1 Innenwiderstand und Stromempfindlichkeit

Mit Schaltung 2 aus der Vorbereitungsmappe soll der Galvanometerausschlag  $\alpha$  in Abhängigkeit vom Vorwiderstand  $R_x$  ( $R_5 \dots R_{10}$ ) bestimmt werden, wobei die Versorgungsspannung  $U$  konstant sein sollte. Der Kehrwert des Ausschlags  $\alpha^{-1}$  ist anschließend über  $R$  aufzutragen und aus der Ausgleichsgerade der Meßpunkte sind die Größen Galvanometer-Innenwiderstand  $R_G$  und statische Stromempfindlichkeit  $C_I$  zu bestimmen.



Wie in der Vorbemerkung erwähnt, ist bei einem Galvanometer der Ausschlag  $\alpha$  zur Stromstärke  $I$  proportional. Den Proportionalitätsfaktor  $C_I$  nennen wir Stromempfindlichkeit, die Beziehung lautet also:

$$\alpha = C_I \cdot I \quad (1)$$

Mit Hilfe der Kirchhoff'schen Regeln lässt sich der Strom herleiten, der durch das Galvanometer fließt:

$$I = U_0 \cdot \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{1}{R_4 + R_x + R_G} \quad (2)$$

Setzt man nun in den Kehrwert  $\frac{1}{\alpha}$  von Formel (1) den Strom aus Gleichung (2) ein, so erhält man:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{R_3}{C_I \cdot U_0 \cdot R_4} (R_4 + R_x + R_G) = \underbrace{\frac{R_3}{C_I \cdot U_0 \cdot R_4}}_m \cdot R_x + \underbrace{\frac{R_3}{C_I \cdot U_0 \cdot R_4} \cdot (R_G + R_4)}_b \quad (3)$$

Somit hat  $\frac{1}{\alpha}$  in Abhängigkeit des Vorwiderstands  $R_x$  die Form einer Geradengleichung mit Steigung  $m$  und y-Achsenabschnitt  $b$ , siehe (3). Liest man nun die Steigung  $m$  der Ausgleichsgeraden ab, so kann mit folgender Formel, die man durch Umformung von (3) erhält, die statische Stromempfindlichkeit  $C_I$  ermitteln:

$$m = \frac{R_3}{C_I \cdot U_0 \cdot R_4} \Rightarrow C_I = \frac{R_3}{m \cdot U_0 \cdot R_4} \quad (4)$$

Für den Messwert mit  $R_x = 0 \Omega$  sieht Gleichung (3) folgendermaßen aus:

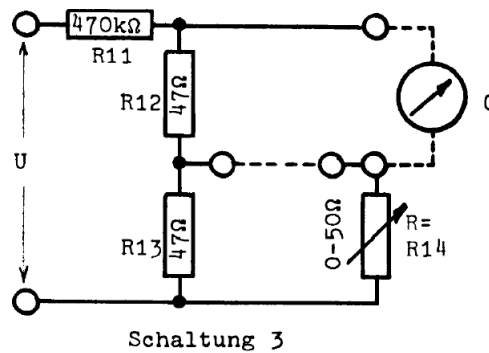
$$\frac{1}{\alpha} = \frac{R_3}{C_I \cdot U_0 \cdot R_4} \cdot (R_G + R_4) \quad (5)$$

Mit dem beim Widerstand  $R_x = 0 \Omega$  gemessenen Galvanometerausschlag  $\alpha$  lässt sich also der Galvanometer-Innenwiderstand  $R_G$  bestimmen - die Formel dafür ergibt sich durch Auflösen von (5) nach  $R_G$ :

$$R_G = \frac{C_I \cdot U_0 \cdot R_4}{R_3 \cdot \alpha} - R_4 \quad (6)$$

## 2.2 Brückenschaltung

Im zweiten Aufgabenteil soll wieder der Innenwiderstand des Galvanometers bestimmt werden, diesmal mit dem Versuchsaufbau nach Schaltung 3 der Vorbereitungsmappe.



### 2.2.1 Brücke offen

Auch hier berechnet sich der durch das Galvanometer fließende Strom durch längere Auswertung der Kirchhoff'schen Formeln zu:

$$I = \frac{R_{12} + R_{13}}{R_{11}} \cdot U_0 \cdot \frac{1}{R_{12} + R_{13} + R_{14} + R_G} \quad (7)$$

Mit (7) folgt für  $\frac{1}{\alpha}$ :

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{C_I \cdot I} = \frac{R_{11} \cdot (R_{12} + R_{13} + R_{14} + R_G)}{C_I \cdot U_0 \cdot (R_{12} + R_{13})} \quad (8)$$

Trennt man in (8) konstante und veränderliche Anteile, so ergibt sich wieder eine Geradendarstellung mit Steigung  $m$  und y-Achsenabschnitt  $b$ :

$$\frac{1}{\alpha} = \underbrace{\frac{R_{11}}{C_I \cdot U_0 \cdot (R_{12} + R_{13})}}_m \cdot R_{14} + \underbrace{\frac{R_{11} \cdot (R_{12} + R_{13} + R_G)}{C_I \cdot U_0 \cdot (R_{12} + R_{13})}}_b \quad (9)$$

$C_I$  lässt sich also wieder aus der Steigung der Ausgleichsgeraden des  $\frac{1}{\alpha}$ -R-Diagramms bestimmen:

$$C_I = \frac{R_{11}}{m \cdot U_0 \cdot (R_{12} + R_{13})} \quad (10)$$

### 2.2.2 Brücke geschlossen

In diesem Fall ist der Widerstand des „Potentiometer-Kreises“ klein gegen den Vorwiderstand, also vernachlässigbar. Für den durch das Galvanometer fließenden Strom gilt dann:

$$I = \frac{R_{12}}{R_{11}} \cdot U_0 \cdot \frac{1}{R_G + R_{12}} \quad (11)$$

Mit Formel (1) ist die reziproke Auslenkung dann:

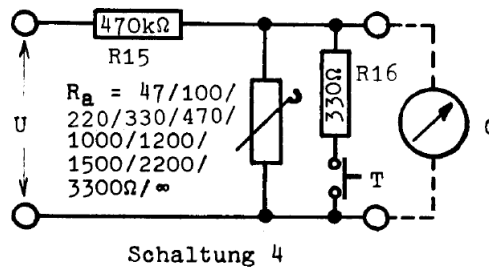
$$\frac{1}{\alpha} = \frac{R_{11} \cdot (R_G + R_{12})}{C_I \cdot R_{12} \cdot U_0} \quad (12)$$

Wie erwartet handelt es sich hierbei um einen konstanten Wert, die Gerade ist parallel zur x-Achse! Gleichsetzen von (8) und (12) (geometrisch der Schnittpunkt der beiden Geraden) ergibt eine einfache Formel für den Innenwiderstand  $R_G$ :

$$R_G = \frac{R_{14} \cdot R_{12}}{R_{13}} \quad (13)$$

### 2.3 Statische Spannungsempfindlichkeit

Um die Relation zwischen  $\alpha$  und  $U$  zu bestimmen, wird eine Schaltung nach Skizze 4 verwendet:



Da der Gesamtstrom komplett durch den Vorwiderstand fließt, kann er folgendermaßen bestimmt werden:

$$I_{ges} = \frac{U_0}{R_{15}} \quad (14)$$

Für  $\alpha$  folgt dann:

$$\alpha = C_I \cdot \frac{U}{R_{15}} \quad (15)$$

- Der Innenwiderstand kann nicht mit einem Ohmmeter gemessen werden, da dessen batteriege-speister Teststrom zu groß für das Galvanometer ist.
- Der parallel geschaltete 330 Ω-Widerstand dient zur Dämpfung, denn: bewegt sich die Spule im Magnetfeld, induziert die sich ändernde Fläche relativ zum Magnetfeld einen Strom, der dann im Widerstand „verheizt“ wird - diese Energie geht also verloren, eventuell auftretendes „Wackeln“ des Zeigers wird so unterbunden.

Die statische Spannungsempfindlichkeit lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$C_U = \frac{C_I}{R_G} \quad (16)$$

### 3 Dämpfungsverhältnis und Schwingungsdauer

In diesem Aufgabenteil wird wieder Schaltung 4 verwendet. Haben wir bisher nur statische Zustände betrachtet, so möchten wir uns jetzt näher ansehen, was passiert wenn der Strom ausgeschaltet wird. Klar ist, dass dann die Lorentzkraft abnimmt und die Spule (und damit auch der Zeiger) im Galvanometer zurückschwingt, während wie oben beschrieben ein Teil der Bewegungsenergie im Dämpfungswiderstand in Wärme umgewandelt wird. Vergleicht man die beiden Galvanometerauslässe vorher / nachher durch Quotientenbildung, ergibt sich das Dämpfungsverhältnis  $k$  der beiden Auslenkungen.

$$k = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \quad (17)$$

In diesem Versuch soll nun

- a) das oben definierte Dämpfungsverhältnis und
- b) die Schwingungsdauer  $T$

in Abhängigkeit vom Außenwiderstand  $R_a$  gemessen werden, wobei möglichst viele Schwingungen ausgenutzt werden sollen. Dann ist zu berechnen bzw. herzustellen:

- Die Abklingkonstante  $\beta_{R_a}$ . Da  $\alpha$  exponentiell abnimmt, besteht für die Abklingkonstante eines Galvanometers eine logarithmische Relation:

$$\beta_{R_a} = \frac{1}{T} \ln \left( \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \right) \quad (18)$$

- Ein Diagramm  $(\beta_{R_a} - \beta_\infty)^{-1}$  über  $R_a$ . Dazu dient die folgende Geradengleichung:

$$\frac{1}{\beta_{R_a} - \beta_\infty} = \frac{2 \cdot \Theta}{G^2} \cdot (R_a + R_G) \quad (19)$$

Mit dem zusätzlichen Punkt  $(-R_G, 0)$  soll die Ausgleichsgerade gezeichnet werden.

- Die Frequenz des ungedämpften Galvanometers:

$$\omega_0 = \sqrt{\left( \frac{2\pi}{T_\infty} \right)^2 + \beta_\infty^2} \quad (20)$$

- Der Außenwiderstand  $R_{a,gr}$  der Grenzdämpfung, der für  $\frac{1}{\omega_0 - \beta_\infty}$  abgelesen wird
- Das Trägheitsmoment  $\Theta$  des schwingenden Systems:

$$\Theta = \frac{2}{m \cdot C_I^2 \cdot \omega_0^4} \quad (21)$$

- Die Rückstellkonstante  $D$  der Torsionsaufhängung:

$$D = \frac{2}{m \cdot C_I^2 \cdot \omega_0^2} \quad (22)$$

- Die Galvanometerkonstante  $G$ :

$$G = \frac{2}{m \cdot C_I \cdot \omega_0^2} \quad (23)$$

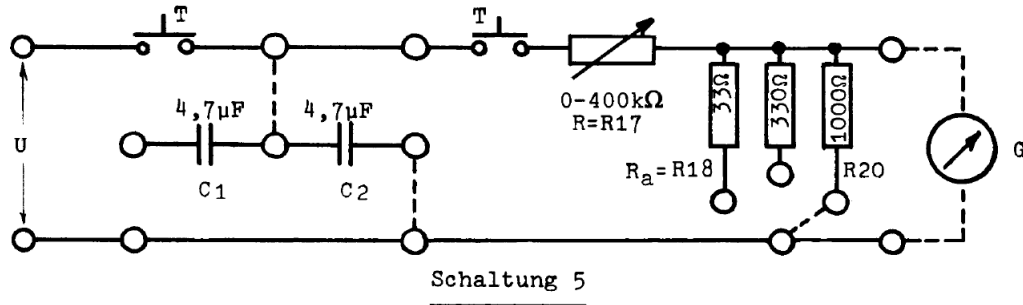
Die letzten drei Kenngrößen ergeben sich aus den drei Gleichungen

$$m = \frac{2\Theta}{G^2} \quad \omega_0^2 = \frac{D}{\Theta} \quad C_I = \frac{G}{D} \quad (24)$$

die in der Aufgabenstellung gegeben waren, wobei  $m$  die Steigung der Geraden und  $C_I'$  der Drehwinkel von Spule bzw. Drehspiegel im Bogenmaß geteilt durch den entsprechenden Strom ist.

## 4 Kurze Stromstöße

Während bisher der Meßstrom so lange floß, bis sich die neue Gleichgewichtslage eingestellt hatte, soll nun die Wirkung von kürzeren Stromstößen untersucht werden. Diese werden durch die Entladung eines Kondensators erzeugt, der gemäß Schaltskizze 5 an das Galvanometer angeschlossen werden soll.



Formell lässt sich ein Stromstoß bzw. die Kondensatorentladung folgendermaßen beschreiben:

$$\int I dt = Q = C \cdot U \quad (25)$$

Da eine Kondensatorentladung keinen „richtigen“ Stromstoß, sondern einen exponentiellen Verlauf darstellt, betrachten wir die Zeit  $T_Q = 3 \cdot R \cdot C$ , zu der 95% der Ladung abgeflossen ist. Deshalb ergeben sich für unterschiedliche Widerstände auch unterschiedliche Ausschläge, wobei für den Maximalausschlag gilt:

$$\alpha_{max} = \frac{1}{\lambda} \cdot C_b \cdot Q \quad (26)$$

mit

$$\lambda = e^{\left(\frac{\Lambda}{2\pi} \arctan\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)\right)} \quad (27)$$

$C_b$  bezeichnet hierbei die ballistische Empfindlichkeit,  $\Lambda$  ist abhängig vom Widerstand  $R$  des Schließkreises:

$$k = e^{\Lambda} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \quad (28)$$

$$C_b = C_I \cdot \frac{2\pi}{T_0} \quad (29)$$

Wie angekündigt müssen die unterschiedlichen Widerstände  $R_a$  differenziert betrachtet werden:

### 4.1 Ballistische Empfindlichkeit bei minimaler Dämpfung ( $R_a \rightarrow \infty$ )

$$\alpha_{max} = \frac{G}{\Theta} \cdot Q \cdot \frac{1}{\omega_0} \quad (30)$$

$$C_b = \frac{G}{\Theta} \cdot \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{R_a + R_G}{R_a} \cdot \frac{1}{0,95} \quad (31)$$

### 4.2 Ballistische Empfindlichkeit für $R_a = 1000 \Omega$

$$\alpha_{max} = \frac{G}{\Theta} \cdot Q \cdot \frac{1}{\omega_0} \cdot e^{\left(-\frac{\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \arctan \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{\beta}\right)} \quad (32)$$

$$C_b = \frac{G}{\Theta} \cdot \frac{1}{\omega_0} \cdot e^{\left(-\frac{\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \arctan \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{\beta}\right)} \cdot \frac{R_a + R_G}{R_a} \cdot \frac{1}{0,95} \quad (33)$$

### 4.3 Ballistische Empfindlichkeit nahe Grenzdämpfung ( $R_a = 330 \Omega$ )

$$\alpha_{max} = \frac{G \cdot Q}{\Theta \cdot \omega_0} \quad (34)$$

$$C_b = \frac{G \cdot (R_a + R_G)}{\Theta \cdot \omega_0 \cdot R_a} \cdot \frac{1}{0,95} \quad (35)$$

### 4.4 Fluxmetrische Empfindlichkeit ( $R_a = 33 \Omega$ )

$$\alpha_{max} = \frac{G}{\Theta} \cdot Q \cdot \frac{1}{\omega_0} \cdot e^{\left(-\frac{\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \arctan \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{\beta}\right)} \quad (36)$$

$$C_b = \frac{G}{\Theta} \cdot \frac{1}{\omega_0} \cdot e^{\left(-\frac{\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \arctan \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{\beta}\right)} \cdot \frac{R_a + R_G}{R_a} \cdot \frac{1}{0,95} \quad (37)$$

Im Falle  $\beta \gg \omega_0$  gilt näherungsweise:

$$\alpha_{max} = \frac{G \cdot Q}{\Theta \cdot \beta} = Q \cdot \frac{R_a + R_G}{F} \quad (38)$$

$$C_b = \frac{R_a + R_G}{G} \cdot Q \cdot \frac{R_a + R_G}{R_a} \cdot \frac{1}{Q} \cdot \frac{1}{0,95} = \frac{(R_a + R_G)^2}{G \cdot R_a} \cdot \frac{1}{0,95} \quad (39)$$

### 4.5 Warum ballistische Messungen?

Ziel ballistischer Messungen in der Mechanik ist es, die Geschwindigkeit eines Objektes (z.B. Geschwindigkeit einer Kugel) festzustellen. Derartige Versuche laufen folgendermaßen ab: das zu untersuchende Objekt wird auf ein Pendel geschossen und der Ausschlag des Pendels gemessen. Mit Energie- und Impulserhaltungssatz lässt sich dann die Geschwindigkeit des Projektils kurz vor dem Aufschlag zurückrechnen.

Im Galvanometer zeigt der durch den Stromstoß verursachte Zeigerausschlag die durch das Galvanometer geflossene Ladung an, da für den Maximalausschlag gilt:

$$\alpha_{max} = C_b \int_0^{T_Q} I \, dt \quad (40)$$

Ist die ballistische Empfindlichkeit  $C_b$  bekannt (theoretische Berechnung siehe oben), so kann man also aus dem Maximalausschlag des Zeigers auf die geflossene Ladung schließen (nur für  $T_Q \ll T$  gültig).