

Theoretische Physik C für das Lehramt - Formelsammlung

von Julian Merkert, Wintersemester 2006/07, Prof. Busch

Mathematik

Mathematik der Felder

Bezeichnung: Skalares Feld $\phi(\vec{r})$, vektorielles Feld $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{r} = (x, y, z)$

Partielle Ableitungen: $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, kurz: $\partial_x, \partial_y, \partial_z$

Nabla-Operator: $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$

Laplace-Operator: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

- $\Delta\phi = \partial_x^2\phi + \partial_y^2\phi + \partial_z^2\phi$

- $\Delta\vec{E} = \begin{pmatrix} \partial_x^2 E_x + \partial_y^2 E_x + \partial_z^2 E_x \\ \partial_x^2 E_y + \partial_y^2 E_y + \partial_z^2 E_y \\ \partial_x^2 E_z + \partial_y^2 E_z + \partial_z^2 E_z \end{pmatrix}$

- Kugelkoordinaten: $\Delta U(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$

Gradient von ϕ : $\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x \phi \\ \partial_y \phi \\ \partial_z \phi \end{pmatrix}$

Divergenz von \vec{E} : $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z$

Rotation von \vec{E} : $\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{pmatrix}$

Rechenregeln:

- $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0$

- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0$

- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\phi) = \Delta\phi$

- $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta\vec{E}$

Totale Ableitung: $\frac{d}{dt}\phi(\vec{r}(t), t) = \partial_x \phi \frac{dx}{dt} + \partial_y \phi \frac{dy}{dt} + \partial_z \phi \frac{dz}{dt} + \partial_t \phi$

Volumenintegral: $I = \int_V d^n x f(\vec{x})$

- $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)$

- In anderen Koordinaten: $I = \int_V d^n y |\det J| f(\vec{x}(\vec{y}))$

- $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_N}{\partial y_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_N} & \dots & \frac{\partial x_N}{\partial y_N} \end{pmatrix}$

Linien- (Weg-)Integral: $\int_C \vec{F} d\vec{x} = \int_a^b \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt} dt$

Flächenintegral: $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_D du dv \vec{F}(\vec{x}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v)$

- Tangentialvektoren an Fläche: $\vec{x}_u = \frac{\partial \vec{x}(u, v)}{\partial u}$, $\vec{x}_v = \frac{\partial \vec{x}(u, v)}{\partial v}$
- Normalenvektor $\vec{n}(u, v) = \vec{x}_u \times \vec{x}_v$

Integralsätze:

- Satz von Gauß: $\int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{A}$
 - V: Volumen (geschlossen)
 - ∂V : zugehörige Oberfläche
- Satz von Stokes: $\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s}$
 - S: Fläche (offen)
 - ∂S : zugehöriger Randweg
- 1. Green'scher Satz: $\int_V d^3r [f(\vec{r})(\Delta g(\vec{r})) + (\vec{\nabla} f(\vec{r})) \cdot (\vec{\nabla} g(\vec{r}))] = \oint_{\partial V} f(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} g(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$
- 2. Green'scher Satz: $\int_V d^3r [f(\vec{r})(\Delta g(\vec{r})) - g(\vec{r})(\Delta f(\vec{r}))] = \oint_{\partial V} [f(\vec{r})\vec{\nabla} g(\vec{r}) - g(\vec{r})\vec{\nabla} f(\vec{r})] \cdot d\vec{A}$

Dirac'sche δ -Funktion

δ -Funktion: $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \cdot \delta(x - x_0) = f(x_0)$

- $\int_{\mathbb{R}^3} d^3r f(\vec{r}) \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = f(\vec{r}_0)$
- $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) \cdot \delta(z - z_0)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \cdot \delta'(x - x_0) = -f'(x_0)$
- $\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i)$, x_i Nullstellen von g
- Darstellungen (jeweils $a \rightarrow 0$):

- $\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}}$
- $\delta_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$
- $\delta_a(x) = \frac{1}{2a} e^{-|\frac{x}{a}|}$
- $\delta_a(x) = \partial_x \frac{1}{1 + e^{-\frac{x}{a}}}$
- $\delta_a(x) = \frac{a}{\pi x^2} \sin^2 \frac{x}{a}$

Fourier-Transformation

Fourier-Darstellung von $f(x)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) \cdot e^{ikx}$

Fourier-Transformierte von $f(x)$: $\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \cdot e^{-ikx}$

Rechenregeln:

- $f'(x) \Leftrightarrow ik \cdot \tilde{f}(k)$
- $f^{(n)}(x) \Leftrightarrow (ik)^n \cdot \tilde{f}(k)$
- $f(x - x_0) \Leftrightarrow e^{ikx_0} \cdot \tilde{f}(k)$
- $\delta(x - x_0) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{ikx_0}$

Elektrodynamik

Maxwell-Gleichungen:

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Kontinuitätsgleichung (Ladungserhaltung): $\partial_t \rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$

Elektrostatik

Gauß'sches Gesetz: $\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$

Elektrisches Feld: $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$

Poisson-Gleichung: $\Delta \phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$

Laplace-Gleichung: $\Delta \phi = 0$

Superpositionsprinzip: $\rho(\vec{r}) = a \cdot \rho_1(\vec{r}) + b \cdot \rho_2(\vec{r}) \Rightarrow \phi = a \cdot \phi_1 + b \cdot \phi_2$

Raumladungsdichte einer Punktladung am Ort \vec{r}' : $\rho(\vec{r}) = Q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}')$

Elektrisches Potenzial einer Punktladung Q am Ort \vec{r}' im freien Raum: $\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} G(\vec{r}, \vec{r}')$

Elektrisches Potenzial einer beliebigen Ladungsverteilung: $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

Coulomb-Gesetz:

- $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$
- $\vec{F} = q\vec{E} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

Im Potenzialfeld gilt: $W = q \cdot (\phi(\vec{r}') - \phi(\vec{r}))$

Dirichlet-Randbedingung für eindeutige Lösung:

- Potenzial auf ∂V gegeben
- $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ auf ∂V
- Allgemeine Lösung: $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3 r' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \rho(\vec{r}') - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \phi(\vec{r}') \cdot \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}$

Neumann'sche Randbedingung:

- Normalenableitung von ϕ auf ∂V gegeben
- $\frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} := \frac{-4\pi}{|\partial V|}$ auf ∂V
- Allgemeine Lösung: $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3 r' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \rho(\vec{r}') + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} \cdot G_N(\vec{r}, \vec{r}') dA' + \frac{1}{|\partial V|} \int_{\partial V} dA' \phi(\vec{r}')$

Oberflächenladungsdichte: $\sigma(\vec{r}) = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial n}$

Green'sche Funktion: $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}') + \text{Randbedingungen}$

- $G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})$
- $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \Delta' G(\vec{r}, \vec{r}') \quad [\Delta' = \text{Differenziere nach } \vec{r}']$
- $G(\vec{r}, \vec{r}') = \underbrace{\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\text{Lsg. fuer freien Raum}} + \underbrace{F(\vec{r}, \vec{r}')}_{\text{fuer andere Randbed.}} \quad \text{mit } \Delta F(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \text{ in } V \Leftrightarrow \Delta' F(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \text{ in } V$

- Green'sche Funktion \cong Potential einer Punktladung

Potenzielle Energie: $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$

- Punktladung: $W_j = q_j \cdot \phi(\vec{r}_j)$
- Kontinuierliche Ladungsverteilung: $W = \int d^3r \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}(\vec{r})|^2$
- Energiedichte: $U(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2} |\vec{E}(\vec{r})|^2$

Kapazität: $q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \phi_j$

- C_{ij} : Kapazitätsmatrix
- für $N = 1$: $q = C \cdot \phi$, $W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \phi^2 = \frac{Q^2}{2 \cdot C}$

Multipolentwicklung:

- Monopolmoment: $Q = \int d^3r' \varrho(\vec{r}')$
- Dipolmoment: $\vec{p} = \int d^3r' \vec{r}' \cdot \varrho(\vec{r}')$
- Quattropolmoment: $Q_{i,j} = \int d^3r' [3 \cdot r'_i r'_j - |\vec{r}'|^2 \delta_{ij}] \cdot \varrho(\vec{r}')$
- $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^3 Q_{i,j} \frac{r_i r_j}{|\vec{r}|^5} + \dots \right]$

Magnetostatik

Statik $\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Stromdichte in der Magnetostatik: $\vec{j} = \vec{v} \cdot \varrho(\vec{r})$

Vektorpotenzial und Eichfreiheit: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

- Eichfreiheit Λ : gleiches Ergebnis für $\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r})$ mit $\vec{\nabla} \times \vec{\Lambda} = 0$

Coulomb-Eichung: $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$

- im freien Raum: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

Gesetz von Biot-Savard: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

Magnetisches Dipolmoment: $\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')$

Magnetisches Dipolfeld: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3 \cdot \vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m} \cdot |\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^5} \right]$

Lorentz-Kraft auf Punktladung: $\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{j}(\vec{r}) \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

Energiedichte im Magnetfeld: $u(\vec{r}) = \frac{|\vec{B}(\vec{r})|^2}{2\mu_0}$

Elektrodynamik

Faraday'sches Induktionsgesetz: $\oint_{\partial S} \vec{E} d\vec{r} = -\partial_t \int_S \vec{B} d\vec{A}$

Magnetischer Fluss: $\phi(t) = \int_S \vec{B} d\vec{A}$

Elektro-Motorische Kraft: $\mathcal{E} = \oint_{\partial S} \vec{E} d\vec{r} = -\partial_t \phi$

Ampère'sches Induktionsgesetz: $\oint_{\partial S} \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 \underbrace{\int_S \vec{j} d\vec{A}}_{=I} + \frac{1}{c^2} \partial_t \int_S \vec{E} d\vec{A}$

Skalare Wellengleichung: $\Delta U(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 U(\vec{r}, t) = 0$

- Lösungsansatz: $U(\vec{r}, t) = f(\vec{r} \cdot \hat{n} - c \cdot t)$
- f : beliebige Funktion
- \hat{n} : Ausbreitungsrichtung
- c : Ausbreitungsgeschwindigkeit der ebenen Welle
- $\perp \hat{n}$: Wellenfronten

Harmonische ebene Wellen: $f(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$

- $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$: Kreisfrequenz
- \vec{k} : Wellenvektor
- $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$: Wellenlänge

Dispersionsrelation: $\omega(\vec{k}) = |\vec{k}| \cdot c$

Phasengeschwindigkeit einer harmonischen Welle: $v_{ph} = \frac{\omega(k_0)}{k_0}$

Gruppengeschwindigkeit eines Pulses mit Trägerwelle k_0 : $v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}$

- Mit Brechungsindex: $v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn(\omega)}{d\omega}}$

EM-Wellen sind Transversalwellen, d.h. $\vec{k} \perp \vec{E}$, $\vec{k} \perp \vec{B}$

Allgemeiner Fall der Polarisation: $\vec{E}(\vec{r}, t) = (\hat{e}_1 E_1 + \hat{e}_2 E_2) \cdot e^{i(\vec{n}\vec{r} - \omega t)}$

- $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{k}$
- $E_1, E_2 \in \mathbb{C}$: Amplituden
- E_1, E_2 gleiche Phase ($E_1, E_2 \in \mathbb{R}$) \Rightarrow lineare Polarisation
- E_1, E_2 nicht die gleiche Phase \Rightarrow elliptische Polarisation
- $|E_1| = |E_2|$ und um 90° phasenverschoben \Rightarrow zirkulare Polarisation
 - rechts zirkular: $\hat{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\hat{e}_1 + i\hat{e}_2)$
 - links zirkular: $\hat{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\hat{e}_1 - i\hat{e}_2)$

Elektrodynamik der Kontinua

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$
- $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \partial_t \vec{D}$

Konstituierende Gleichungen:

- $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(\vec{E}, \vec{B}) = \varepsilon_0 \underbrace{(1 + \chi_e)}_{=: \varepsilon} \vec{E}$
- $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}(\vec{E}, \vec{B}) = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_m)}_{=: \mu} \vec{H}$
- \vec{P} : Polarisation, oft $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$
- \vec{M} : Magnetisierung, oft $\vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H}$

- χ_e : Dielektrische Suszeptibilität
- χ_m : Magnetische Suszeptibilität

Anschlussbedingungen an der Grenzfläche zweier Medien:

- $(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma$
- $(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0$
- $\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$
- $\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$
- σ : Oberflächenladung
- \vec{K} : Oberflächenstrom

Relativitätstheorie

Transformationen

Äquivalenzprinzip: In jedem Bezugssystem sind die physikalischen Gesetze (Beziehung zwischen Größen) gleich

Galilei-Transformation: $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_s \cdot t$, $t = t'$

- Bewegte Uhren gehen gleich schnell
- Länge eines Stabes unabhängig von \vec{v}_s
- Direkte Addition von Geschwindigkeiten

Einstein: Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist dieselbe in allen Inertialsystemen

Lorentz-Transformation:

- Bewegung mit v_s in x-Richtung:

$$\begin{aligned} - x &= \gamma \cdot (x' + \beta \cdot c \cdot t') \\ - y &= y' \\ - z &= z' \\ - c \cdot t &= \gamma \cdot (c \cdot t' + \beta \cdot x') \end{aligned}$$

- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ mit $\beta = \frac{v_s}{c}$: Lorentz-Faktor

- Allgemein:

$$\begin{aligned} - \vec{r} &= \vec{r}' + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{r}') \cdot \vec{\beta} - \gamma \cdot \vec{\beta} \cdot c \cdot t' \\ - c \cdot t &= \gamma \cdot (c \cdot t' + \vec{\beta} \cdot \vec{r}') \end{aligned}$$

- $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}_s}{c}$, $\beta = |\vec{\beta}|$, $\gamma = \frac{1}{1-\beta^2}$

- Bewegte Uhren gehen langsamer, Zeitdilatation $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$ (K' : Ruhesystem der Uhr)

- Bewegte Stäbe sind kürzer, Lorentz-Kontraktion $l = \frac{1}{\gamma} l'$ (K' : Ruhesystem des Stabes)

- Addition von Geschwindigkeiten: $v = \frac{v' + v_s}{1 + \frac{v' \cdot v_s}{c^2}}$, $v' = \frac{v - v_s}{1 - \frac{v' \cdot v_s}{c^2}}$

Relativistischer Doppler-Effekt: $\omega = \gamma \cdot \omega' \cdot (1 + \beta \cdot \cos \theta')$

- $\tan \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma \cdot (\cos \theta' + \beta)}$

- $\theta = \angle(\vec{K}, \vec{v}_s)$

- $\theta' = \angle(\vec{K}', \vec{v}_s)$

4-Vektoren

4-Vektor: Satz von 4 physikalischen Größen, die unter einer Lorentz-Transformation wie (ct, \vec{r}) transformieren

- $a^\mu := (a^0, \vec{a}) = (a^0, a^1, a^2, a^3)$
- $(a^0)' = \gamma \cdot (a^0 - \beta \cdot a^1)$
- $(a^1)' = \gamma \cdot (a^1 - \beta \cdot a^0)$
- $(a^2)' = a^2$
- $(a^3)' = a^3$
- $a^\mu := (a^0, \vec{a})$ heißt kovarianter 4-Vektor
- $a_\mu := (a^0, -\vec{a})$ heißt kontravarianter 4-Vektor
- Ortsvektor: $x^\mu = (c \cdot t, \vec{x})$

Skalarprodukt: $a \cdot b = a^0 \cdot b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu =: a_\mu b^\mu$ (Einstein'sche Summenkonvention)

- $x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\alpha} x^\alpha = c^2 t^2 - |\vec{x}|^2 = \tilde{x}^\mu \tilde{x}_\mu$

Differentialoperatoren:

- $\partial_\mu := \left(\frac{1}{c} \partial_t, \vec{\nabla} \right)$ kontravariant
- $\partial^\mu := \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla} \right)$ kovariant
- $\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta$

Lorentz-Transformation:
$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\tilde{x}^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 L_{\mu\lambda} x^\lambda = L_{\mu\lambda} x^\lambda$

Relativistische Elektrodynamik

Wellengleichungen: $\partial_\mu \partial^\mu \vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{c} j^\nu$

Lorentz-Eichung: $\partial_\mu A^\mu = 0$ mit $A^\mu = (\phi, c \cdot \vec{A})$

Feldstärketensor:
$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -c \cdot B_z & c \cdot B_y \\ E_y & c \cdot B_z & 0 & -c \cdot B_x \\ E_z & -c \cdot B_y & c \cdot B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Dualer Feldstärke-Tensor:
$$\bar{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{1}{c} E_z & -\frac{1}{c} E_y \\ B_y & -\frac{1}{c} E_z & 0 & \frac{1}{c} E_x \\ B_z & \frac{1}{c} E_y & -\frac{1}{c} E_x & 0 \end{pmatrix}$$

- ε : Levi-Civita-Symbol

Inhomogene Maxwell-Gleichungen: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{c} j^\nu$

Homogene Maxwell-Gleichungen: $\partial_\mu \bar{F}^{\mu\nu} = 0$

Relativistische Kinematik

Relativistischer Impuls: $\vec{p} = \gamma \cdot m_0 \cdot \vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \vec{v}$

Energie-Impuls-Relation: $E = \sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + |\vec{p}|^2 \cdot c^2}$

4er-Impuls: $p^\mu = (\frac{1}{c}E, \vec{p})$

4er-Geschwindigkeit: $v^\mu = \gamma \cdot (c, \vec{v})$

4er Impuls-Geschwindigkeits-Beziehung: $p^\mu = m_0 \cdot v^\mu$

Impuls Photon: $\vec{p} = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}$

Lichtkegel, Kausalität

$x^\mu = (c \cdot t, \vec{x})$, $x_\mu x^\mu = c^2 \cdot t^2 - |\vec{x}|^2 =: s^2$, $s_{12}^2 = c^2 \cdot (t_1 - t_2)^2 - |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2$

Lichtartig: $s = 0$, $c = \frac{|\vec{x}|}{t}$

Raumartig: $s_{12}^2 < 0$ [$c^2 \cdot (t_1 - t_2)^2 < (x_1 - x_2)^2$ in 1D]

- Ereignisse lassen sich nicht durch ein Lichtsignal verbinden
- Kein kausaler Zusammenhang

Zeitartig: $s_{12}^2 > 0$ [$c^2 \cdot (t_1 - t_2)^2 > (x_1 - x_2)^2$ in 1D]

- Ereignisse lassen sich durch Lichtsignal verbinden
- Kausaler Zusammenhang möglich

Allgemeine Relativitätstheorie

Ideen:

- träge Masse = schwere Masse
- starkes Äquivalenzprinzip:
 - Forderung: Physik in „frei fallenden“ Bezugssystem in einem Gravitationsfeld \Leftrightarrow Physik in einem Inertialsystem ohne Gravitation
 - Physik in einem nicht-beschleunigten Bezugssystem mit Gravitation $\vec{g} \Leftrightarrow$ Physik in einem beschleunigten Bezugssystem mit $\vec{a} = -\vec{g}$

Folgen:

- Gravitation krümmt den Raum (Lichtstrahlen)
 - Gravitationspotential: $\phi(\vec{r}) = -G \cdot \frac{M}{|\vec{r}|}$
 - Brechungsindex: $n(\vec{r}) = 1 - \frac{\phi(\vec{r})}{c^2}$
- Rot-Verschiebung von Licht
 - Doppler-Shift: $(\frac{\Delta\omega}{\omega})_{Doppler} = \frac{\Delta U}{c}$
- Zeitdilatation durch Gravitation: $\frac{d\tau_1 - d\tau_2}{d\tau_2} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{c^2}$
 - Für statisches ϕ : $\frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta\phi}{c^2}$
 - Uhren im starken Gravitationsfeld gehen schneller

Quantenmechanik

Schrödinger-Gleichung: $i\hbar\partial_t\Psi = \hat{H}\Psi$

- $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})$: Hamilton-Operator
- $\Psi(\vec{r}, t)$: quantenmechanische Wellenfunktion
- $V(\vec{r})$: Potential, in dem sich das Teilchen mit Masse m befindet (potentielle Energie), z.B. im elektrischen Potential $\phi(\vec{r})$: $V(\vec{r}) = q \cdot \phi(\vec{r})$

Physikalische Größen in der Quantenmechanik: hermitesche Operatoren

Hermitescher Operator: $\hat{O} = \hat{O}^\dagger$

- \hat{O}^\dagger : hermitesch konjugierter Operator, $\int d^3r \varphi^*(\hat{O}\Psi) = \int d^3r (\hat{O}^\dagger\varphi^*)\Psi \quad \forall \Psi, \varphi$
- Eigenschaften:
 - reelle Eigenwerte $\hat{O}\varphi = \underbrace{\lambda}_{\in\mathbb{R}}\varphi$
 - Eigenfunktionen φ bilden vollständiges Orthonormalsystem, also „Basis“

Wert $\langle \hat{O} \rangle$ der physikalischen Größe im Zustand $\Psi(\vec{r}, t)$: $\langle \hat{O} \rangle_\Psi = \int_V d^3r \Psi^*(\vec{r}, t) (\hat{O}\Psi(\vec{r}, t)) \in \mathbb{R}$

Impuls: $\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$

Ort: $\hat{r} = \vec{r}$

Energie: $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})$

- klassische Mechanik: Hamilton-Funktion $H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) \rightarrow$ Quantenmechanik: $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})$

Kopenhagener Deutung:

$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r$ = Wahrscheinlichkeit dafür, zur Zeit t am Ort \vec{r} das Teilchen in einem Volumen d^3r zu finden

Normierung: $\int_V d^3r |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = 1$

$\langle \hat{O} \rangle$ ist das bezüglich Ψ gewichtete Mittel möglicher Messwerte

Mögliche Messwerte sind die reellen Eigenwerte des Hermiteschen Operators \hat{O}

Wahrscheinlichkeitsdichte-Operator: $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \int d^3r \Psi^*(\vec{r}, t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \Psi(\vec{r}, t)$

Wahrscheinlichkeitsstromdichte-Operator: $\vec{j}(\vec{r}_0, t) = \int d^3r \Psi^*(\vec{r}, t) \hat{j} \Psi(\vec{r}, t)$

- $\hat{j} = \frac{1}{2m} (\hat{p}\hat{\psi}_w + \hat{\psi}_w\hat{p})$

Eigenschaften der Schrödinger-Gleichung

- Lineare Differentialgleichung \Rightarrow Superposition möglich, nicht relativistisch
- Stationäre Schrödinger-Gleichung: $\hat{H}\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r})$

Verfahren zur Bestimmung der Wellenfunktion $\Psi(\vec{r}, t)$, falls \hat{H} keine Funktion der Zeit:

1. $\hat{H}\varphi = E\varphi$ mit Ansatz lösen \rightarrow Satz von Eigenwerten $\{E_1, E_2, \dots\}$ und Eigenfunktionen $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$
2. $\Psi(\vec{r}, 0) = \sum_i \alpha_i \cdot \varphi_i(\vec{r}), \quad \alpha_i \in \mathbb{C}$
– $\alpha_i = \int d^3r \varphi_i^*(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, 0)$
3. $\Rightarrow \Psi(\vec{r}, t) = \sum_i \alpha_i \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E_i \cdot t} \cdot \varphi_i(\vec{r})$

Oder: $\Psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}E \cdot t}$

- Lösungsansatz: $\varphi(x) = A \cdot e^{ikx} + B \cdot e^{-ikx} \Rightarrow \varphi(x) = A \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\sqrt{2m \cdot (E-V)} \cdot x} + B \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{2m \cdot (E-V)} \cdot x}$

Vertauschungsrelationen, Kommutatoren, Anti-Kommutatoren

Kommutator: $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

- Impuls und Ort: $[\hat{p}_x, \hat{x}] = \frac{\hbar}{i}$
- $[\hat{L}, \hat{M}] = -[\hat{M}, \hat{L}]$
- $[\hat{L}, \hat{L}] = 0$
- $[\hat{L}, a\hat{M}] = a[\hat{L}, \hat{M}]$
- $[\hat{L}_1 + \hat{L}_2, \hat{M}] = [\hat{L}_1, \hat{M}] + [\hat{L}_2, \hat{M}]$
- $[\hat{L}_1\hat{L}_2, \hat{M}] = [\hat{L}_1, \hat{M}]\hat{L}_2 + \hat{L}_1[\hat{L}_2, \hat{M}]$
- $[\hat{L}_1, [\hat{L}_2, \hat{L}_3]] + [\hat{L}_2, [\hat{L}_3, \hat{L}_1]] + [\hat{L}_3, [\hat{L}_1, \hat{L}_2]] = 0$

Anti-Kommutator: $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$

Einfache Systeme

Freies Teilchen: $i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi$

- Ansatz: $\Psi = A \cdot e^{\pm i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$
- $\Rightarrow \underbrace{\hbar\omega}_E \Psi = \underbrace{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}_{\frac{\vec{p}^2}{2m}} \Psi$

Harmonischer Oszillator: $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\varphi = E\varphi$

- Lösung kompliziert (mit Hermite-Polynomen etc.), deshalb:
- $:\Leftrightarrow \hat{H}\varphi_n = E_n\varphi_n$
 - $E_n = \hbar \cdot \omega \cdot (n + \frac{1}{2}), n \in \mathbb{N}_0$
 - $\int d^3r \varphi_n^*(\vec{r}) \varphi_m(\vec{r}) = \delta_{nm}$
 - $\hat{H} = \hbar \cdot \omega \cdot (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$
 - * $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \cdot \hat{x} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \cdot \hat{p}_x$: Absteiger-Operator
 - * $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \cdot \hat{x} - i \cdot \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \cdot \hat{p}_x$: Aufsteiger-Operator
 - * $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cdot (\hat{a}^\dagger + \hat{a})$
 - * $\hat{p}_x = \frac{1}{i} \cdot \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \cdot (\hat{a}^\dagger - \hat{a})$
 - * $\hat{a}\varphi_n = \sqrt{n} \cdot \varphi_{n-1}, \hat{a}\varphi_0 = 0$
 - * $\hat{a}^\dagger\varphi_n = \sqrt{n+1} \cdot \varphi_{n+1}$
 - * $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$
 - * $[\hat{a}^m, \hat{a}^\dagger] = m \cdot \hat{a}^{m-1}, [\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^m] = m \cdot (\hat{a}^\dagger)^{m-1}$
 - * $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}, [\hat{n}, \hat{a}^m] = -m \cdot \hat{a}^m, [\hat{n}, (\hat{a}^\dagger)^m] = m \cdot (\hat{a}^\dagger)^m$

Unschärferelation

Unschärfe einer physikalischen Größe \hat{O} im Zustand $\Psi(\vec{r}, t)$: $(\Delta O^2)_\Psi = \int d^3r \Psi^* \left(\hat{O} - \langle \hat{O} \rangle_\Psi\right)^2 \Psi$

- = 0 in Eigenzuständen
- Statistische Aussage, hängt vom Zustand des Systems ab

Unschärferelation: $(\Delta Q^2)_\Psi \cdot (\Delta R^2)_\Psi \geq \frac{1}{4} \left| \langle [\hat{Q}, \hat{R}] \rangle_\Psi \right|^2$

- $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$
- Statistische Aussage, Unsicherheit ist nicht in der Messung, sondern in der Vorhersage

Teilchen im allgemeinen elektromagnetischen Feld

Hamilton-Operator: $\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q \cdot \phi$

Eich-Transformationen:

- $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' + \nabla \chi$
- $\phi \rightarrow \phi' - \partial_t \chi$
- $\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i \frac{q}{\hbar c} \chi}$: angepasste Wellenfunktion

Wasserstoffatom

Schrödinger-Gleichung: $\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right] \Psi = E \Psi$

Wellengleichung: $\Psi(r, \theta, \phi) = R(r) \cdot Y(\theta, \phi)$

- Winkelanteil / Kugelflächenfunktionen: $Y_{l,m} = (-1)^m \cdot \left(\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot P_l^{|m|} \cdot (\cos \theta) \cdot e^{i \cdot m \cdot \phi}$
 - $l \in \mathbb{N}$: Drehimpulsquantenzahl
 - $-l \leq m \leq l$: magnetische Quantenzahl
 - $P_l^{|m|}(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \cdot \partial_x^{|m|} P_l(x)$: Assoziierte Legendre-Polynome
 - $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \cdot \partial_x^l (x^2-1)^l$: Legendre-Polynom
 - Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen:
 - * $\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta |Y_{l,m}(\theta, \phi)|^2 = 1$
 - * $\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_{l',m'}^*(\theta, \phi) Y_{l,m}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$
 - Beispiele:
 - * $Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
 - * $Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \cos \theta$
 - * $Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cdot \sin \theta \cdot e^{\pm i \phi}$
- Radialteil: $R_{n,l}(r) = \left(\frac{1}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{n^2 \cdot (n+l)!} \cdot \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{(n+l)!}} \cdot \rho^l \cdot e^{-\frac{\rho}{2}} \cdot L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$
 - $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m \cdot e^2} \approx 0,529 \cdot 10^{-10}$ m: Bohr'scher Radius
 - $\rho = \frac{2}{n \cdot a_0} \cdot r$
 - $L_r^s(\rho) = \partial_\rho^s L_r(\rho)$: Assoziierte Laguerre-Polynome
 - $L_r(\rho) = e^\rho \cdot \partial_\rho^r (\rho^r \cdot e^{-\rho})$: Laguerre-Polynom
- Zusammengefasst: $\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = \left(\frac{4 \cdot (n-l-1)!}{(n \cdot a_0)^3 \cdot n \cdot (n+l)!^3} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \rho^l \cdot L_{n+l}^{2l+1}(\rho) \cdot e^{-\frac{\rho}{2}} \cdot Y_{l,m}(\theta, \phi)$

Energieeigenwert: $E_n = -\frac{R_H}{n^2}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

- $R_H = \frac{m \cdot e^4}{2\hbar^2 \cdot (4\pi\epsilon_0)^2} \approx 13,605$ eV

Spektrallinien: $\Delta E = E_n - E_m = \hbar \cdot \omega$

Drehimpuls und Spin

Drehimpulsoperator: $\hat{\vec{L}} = -\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{r}}$

- $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i \cdot \hbar \cdot L_z$
- $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i \cdot \hbar \cdot L_x$
- $[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i \cdot \hbar \cdot L_y$
- $[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$
- $\hat{L}^2 = -\hbar^2 \cdot \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \partial_\theta (\sin \theta \cdot \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \partial_\phi^2 \right)$, $\hat{L}^2 Y_{l,m} = \hbar^2 \cdot l \cdot (l+1) \cdot Y_{l,m}$
- $\hat{L}_z = -i \cdot \hbar \cdot \partial_\phi$, $\hat{L}_z Y_{l,m} = \hbar \cdot m \cdot Y_{l,m}$

Hamilton-Operator des Wasserstoffatoms im Magnetfeld: $\hat{H} = \hat{H}_{\text{ohne } \vec{B}} - \frac{e \cdot B}{2m} \cdot \hat{L}_z$

- Aufspaltung: $\Delta E = \mu_B \cdot B \cdot m$
- $\mu_B = \frac{e \cdot \hbar}{2m_e}$: Bohr'sches Magneton

Spin-Quantenzahl: $s = \pm \frac{1}{2}$

Spin-Operator: definiert durch obige Eigenschaften von Drehimpuls-Operatoren

- Darstellung: $\vec{S} = \frac{1}{2} \cdot \hbar \cdot \hat{\vec{\sigma}}$, $\hat{\vec{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$
- $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: Pauli-Spin-Matrizen
- Eigenzustände zu $\hat{\sigma}_z$: $\Psi_{+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Psi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\hat{S}_z \Psi_{\pm \frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{2} \cdot \hbar \cdot \Psi_{\pm \frac{1}{2}}$