Physik II - Formelsammlung

von Julian Merkert, Sommersemester 2005, Prof. Drexlin

Elektrostatik

Ladung, Feld und Fluss
Elementarladung: $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$, elektrische Feldkonstante $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \left[= \frac{As}{Vm}\right]$, Probeladung q.

Elektrische Ladung: $Q = \int_V \varrho(\vec{r}) dV = n \cdot e \quad [C = Coulomb = As]$

Elektrische Kraft: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{\vec{r}}$ (Coulomb-Gesetz)

Elektrisches Feld: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\vec{r}} = -\nabla V \quad \left[\frac{N}{C} = \frac{V}{m}\right] \qquad dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dQ}{r^2}$

Linienladungsdichte: $\lambda = \frac{dQ}{dl} \quad \left[\frac{C}{m}\right]$

Flächenladungsdichte: $\sigma = \frac{dQ}{dA} \quad \left[\frac{C}{m^2}\right]$

Raumladungsdichte: $\varrho = \frac{dQ}{dV} \quad \left[\frac{C}{m^3}\right]$

Elektrischer Fluss: $\Phi_{El} = \int_A \vec{E} d\vec{A}$ (Skalarprodukt einer Fläche mit dem durchdringenden Feld)

Gauß'scher Satz: Der elektrische Fluss durch eine beliebige geschlossene Fläche ist proportional zur eingeschlossenen Ladung und unabhängig von der Ladungsverteilung.

$$\Phi_{El} = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

Arbeit, Energie, Potenzial, Spannung
Elektrische Arbeit: $W = \int_\infty^r \vec{F} d\vec{r} = E_{Pot}(\infty) - E_{Pot}(\vec{r}) = -E_{Pot}(r)$ Konservatives elektrisches Feld: $\oint \vec{E} d\vec{r} = 0$

Potentielle Energie: $E_{Pot}(\vec{r}) = \int_r^\infty q\vec{E} d\vec{r} \qquad \Delta E_{Pot} = E_{Pot}(\vec{b}) - E_{Pot}(\vec{a}) = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} q\vec{E} d\vec{r} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$

Elektrisches Potenzial: $V = \frac{E_{Pot}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}$

Elektrische Spannung: $U = \Delta V = V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = -\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} d\vec{r} \quad \left[V = Volt = \frac{J}{C}\right]$

1. Maxwell-Gleichung: $\int_A \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varrho\, dV \qquad \nabla \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho$

2. Maxwell-Gleichung: $\nabla \times \vec{E} = 0$ (Elektrisches Feld ist in Elektrostatik wirbelfrei)

Divergenztheorem: $\int_A \vec{E} d\vec{A} = \int_V \nabla \vec{E}\, dV$

Poisson-Gleichung: $\Delta V = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$ (Laplace-Operator: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$)

Kondensatoren
Elektrisches Feld: $E = \frac{U}{\varepsilon_{rel} d}$

Kapazität: $C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \varepsilon_{rel} \frac{A}{d} \quad \left[F = Farad = \frac{C}{V}\right]$

Energie: $E_{El} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2$

Energiedichte: $w_{el} = \frac{E_{El}}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_{rel} E^2$

Parallelschaltung: $C = C_1 + C_2$

Serienschaltung: $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

Dielektrizitätskonstante des Dielektrikums: $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{rel}$

Polarisation (Dipolmoment): $\vec{p} = \alpha \vec{E} = q \cdot l$ (α: Polarisierbarkeit)

Elektrodynamik

Elektrische Ströme
Elektrischer Strom: $I = \frac{dQ}{dt} = \int_A \vec{j} d\vec{A} \quad [A = Ampere = \frac{C}{s}]$

Stromdichte: $\vec{j} = (ne)\vec{v}_D = \varrho \vec{v}_D = \sigma_E \vec{E}$ $\quad$ ($\varrho = ne$: Ladungsträgerdichte, $\vec{v}_D$: Driftgeschwindigkeit)

Ladungserhaltung: $I = \oint_A \vec{j} d\vec{A} = -\frac{d}{dt} Q_{in}(t)$

Kontinuitätsgleichung: $\nabla \vec{j} = -\frac{d}{dt} \varrho(t)$

Leitfähigkeit: $\sigma_E = \frac{e^2 n \tau}{m_e} \quad [\frac{1}{\Omega m}]$ $\quad$ (τ: mittlere Stoßzeit)

Spezifischer Widerstand: $\varrho = \frac{1}{\sigma_E} = \frac{E}{j} \quad [\Omega m]$

Homogene Leiter: $R = \varrho \frac{l}{A} \quad E = \frac{U}{l} \quad j = \frac{I}{A}$

Ladungsträgerdichte: $n(T) = n_0 e^{-\Delta E / k \cdot T}$ $\quad$ ($k = 8,6 \cdot 10^{-5} \frac{eV}{K}$: Boltzmann-Konstante)

Elektrische Leistung: $P = U \cdot I = I^2 R = \frac{U^2}{R}$

Elektrische Arbeit: $W = I^2 \cdot R \cdot \Delta t = \frac{U^2}{R} \cdot \Delta t$

1. Kirchhoff'sches Gesetz: an Stromknoten gilt: $\sum_k I_k = 0$

2. Kirchhoff'sches Gesetz: in einem geschlossenen Stromkreis gilt: $\sum_k U_k = U_0$

Widerstände
Widerstand (Ohm'sches Gesetz): $R = \frac{U}{I} = const \quad [\Omega = Ohm = \frac{V}{A}]$

Serienschaltung: $R = \sum_k R_k$

Parallelschaltung: $\frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k}$

Kondensatoren
Aufladestrom: $I(t) = I_0 e^{\frac{-t}{RC}}$

Entladestrom: $I(t) = I_0 e^{\frac{-t}{R_2 C}}$

Elektrochemische Prozesse
Avogradro-Konstante $N_A = 6 \cdot 10^{23}$, Wertigkeit des Ions: Z^{ion}, Boltzmann-Konstante k

1 Mol transportiert $Q = N_A \cdot Z^{ion} \cdot e$ Ladung

Boltzmann-Gleichung: $\frac{Cu^{++}\text{-Konzentration (Metall)}}{Cu^{++}\text{-Konzentration (Elektrolyt)}} = e^{-\frac{eU}{kT}}$

Magnetostatik

Bewegte geladene Teilchen im Magnetfeld
Lorentzkraft: $\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad \vec{F}_L \perp \vec{v}, \vec{F}_L \perp \vec{B}$ $\quad$ (Feld verrichtet keine Arbeit!)

Magnetisches Feld (falls $\vec{B} \perp \vec{v}$): $\vec{B} = \frac{F}{q \cdot v} \quad [T = Tesla = \frac{Ns}{Cm}]$

Lorentzkraft allgemein: $\vec{F}_L = \underbrace{q \cdot \vec{v} \times \vec{B}}_{zentripetal} + \underbrace{q \cdot \vec{E}}_{lin.\ Beschl.}$

Zyklotron: $\vec{F}_L = \vec{F}_Z,\ qvB = m\frac{v^2}{r},\ \omega = \frac{q}{m} \cdot B$ $\quad$ (Zyklotronfrequenz)

Spezifische Ladung: $\frac{e}{m} = \frac{2U}{r^2 B^2}$

Ströme im Magnetfeld
Leiter im Magnetfeld: $\vec{F} = \int_V d\vec{F} = \int_V (\vec{j} \times \vec{B}) dV$

Gerader Draht im homogenen B-Feld: $d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B})$ $\quad$ ($d\vec{l}$: Vektor in Richtung der techn. Stromrichtung)

Magnetisches Dipolmoment einer Leiterschleife: $\vec{\mu} = I \cdot \vec{A} \cdot n \quad [Am^2 = \frac{J}{T}]$ $\quad$ (n: Anzahl der Windungen)

Drehmoment auf Leiterschleife: $\vec{D} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

Hall-Effekt: $\vec{F}_L = -\vec{F}_E \quad e \cdot v_D \cdot B = e \cdot E_H \quad E_H = v_D \cdot B$

Hall-Spannung: $U_H = E_H \cdot b$ (b: Dicke)

Magnetfelder von bewegten Ladungen
Magnetfeld: $\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \hat{\vec{r}}}{r^2}$ (für Punktladung)

Bezug beider Feldkonstanten: $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

Magnetfelder von Strömen
Biot-Savart'sches Gesetz: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \hat{\vec{r}}}{r^2} \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_l \frac{d\vec{l} \times \hat{\vec{r}}}{r^2}$

Lange Spule: $B_x(Innen) = \mu_0 \frac{N}{l} I,\ B_x(Spulenende) = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N}{l} I$

Magnetfeld eines langen homogenen Leiters: $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r_\perp}$

Kraft pro Längeneinheit auf zwei parallele Leiter: $\frac{dF_2}{dl_2} = -\frac{\mu_0}{2\pi R} I_1 I_2$

Ampère'sches Gesetz: $\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I$ ($d\vec{s}$: diff. Längenelement der Ampère'schen Leiterschleife, I: umschlossener Strom, $\oint$: Umlaufintegral, Integration über geschlossene Kurve (Pfad ist egal))

Lösungsweg bei Symmetrie ($\vec{B} = const$ auf einem Weg): $\oint \vec{B} d\vec{s} = \vec{B} \oint d\vec{s}$

Das Magnetfeld und sein Potenzial
Magnetische Feldlinien sind immer geschlossen: $\oint \vec{B} d\vec{A} = 0$

Gauß'scher Integralsatz („Divergenztheorem"): $\oint \vec{B} d\vec{A} = \int_V div\vec{B} dV$ ($d\vec{A}$: geschlossene Oberfläche, V: von der Oberfläche eingeschlossenes Volumen)

$div\vec{B} = 0$ keine Quellen / Senken, d.h. keine Monopole

Stokes'scher Integralsatz: $\oint \vec{B} d\vec{s} = \int_A rot\vec{B} d\vec{A}$

Ampère'sches Gesetz (diff. Form): $rot\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Vektorpotenzial $\vec{A}$: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Coulomb-Eichung (zusätzl. Bedingung): $div\vec{A} = 0$

Poissongleichung der Magnetostatik: $\Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$ (Laplace!)

Atomares Bild des Magnetismus
Drehimpuls L, magnetisches Moment $\vec{\mu} = I \cdot \vec{A}$, magnetische Quantenzahl m_l, Planck'sche Konstante $h = 4,14 \cdot 10^{-15} eVs$, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

Relation zwischen μ und $\vec{L}$: $\vec{\mu}_{Bahn} = \frac{q}{2m}\vec{L}$ ($\frac{q}{2m}$: gyromagnetisches Verhältnis)

Drehimpuls in z-Richtung: $L_z = m_l \cdot \hbar = m_l \cdot \frac{h}{2\pi}$

Bohr'sches Magneton (elementares magnetisches Moment): $\mu_{Bohr} = \frac{e \cdot \hbar}{2m_e}$

Magnetisches Moment: $\vec{\mu} = -\frac{e\hbar}{2m_e}\frac{\vec{L}}{\hbar} = -\vec{\mu}_{Bohr}\frac{\vec{L}}{\hbar}$

Magnetisches Moment durch Eigendrehimpuls $\vec{s}$: $\vec{\mu}_s = -2\mu_{Bohr}\frac{\vec{s}}{\hbar}$

Magnetisierung: $\vec{M} = \frac{1}{V}\sum_i \vec{\mu}_i = \chi \cdot \vec{H}_0 \qquad \left[\frac{A}{m}\right]$ (χ: magnetische Suszeptibilität)

Gesamtfeld: $\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0\vec{M} = \mu_0(\vec{H}_0 + \vec{M})$ ($\vec{H}_0$: Magnetische Erregung)

Paramagnetismus ($\chi > 0$)

- Jedes Atom hat permanentes magnetisches Dipolmoment $\vec{\mu}$
- Curie'sches Gesetz: $\vec{M} = \frac{1}{3}\frac{\mu B_0}{k \cdot T}\vec{M}_S$ ($\vec{M}_S$: Sättigungsmagnetisierung)

Diamagnetismus ($\chi < 0$)

- Atome ohne permanentes magnetisches Moment, magnetische Momente werden induziert.
- $E = -\frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t}$

Zeitabhängige elektrische und magnetische Felder

Faraday'sches Induktionsgesetz: $U_{ind} = \oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\Phi_{magn} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B} d\vec{A}$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d}{dt}\vec{B}$

Induktionsspannung an einem Leiter der Länge $l \perp \vec{B}$: $U_{ind} = vBl$

Lenz'sche Regel: Ein induzierter Strom ist so gerichtet, dass das von ihm erzeugte Magnetfeld der Änderung des magnetischen Flusses entgegenwirkt, die den Strom erzeugt.

Wechselstrom-Generator: $U_{ind} = U_{max} \cdot \sin(\omega t + \delta)$

Induktivität L $\left[H = Henry = \frac{Tm^2}{A} = \frac{Vs}{A}\right]$
Magnetischer Fluss: $\Phi_{magn} = \int_A \vec{B} d\vec{A} = L \cdot I$

$U_{ind} = -L\frac{d}{dt}I$

Lange Zylinderspule: $L = \mu_0\mu_r\left(\frac{N}{l}\right)^2 Al$

2 konzentrische Zylinderspulen: $L_{12} = \mu_0\frac{N_1 N_2}{l_1}A_2$

R-L-Stromkreis
Charakteristische Zeitkonstante: $\tau = \frac{L}{R}$

Einschaltvorgang: $I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right)$

Ausschaltvorgang: $I(t) = \frac{U_0}{R}e^{-(R/L)t} = \frac{U_0}{R}e^{-t/\tau}$

Transformator
Unbelastet: $\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}$

Belastet: $I_1' \cdot U_1 = I_2 \cdot U_2 \qquad \frac{I_2}{I_1'} = \frac{N_1}{N_2}$

Wechselstrom
Mittlere Spannung: $< U > = \frac{1}{T}\int_0^T U(t)dt$

Effektive Spannung: $U_{eff} = \sqrt{< U^2 >}$ (rms (=root means square)-Wert)

Effektivwerte für sinusförmige Verläufe: $U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

Leistung: $P = U_{eff} \cdot I_{eff}$

Ohm'scher Widerstand:

- Strom und Spannung in Phase
- Widerstand: $R = \frac{U}{I}$

Lastkapazität:

- Strom eilt Spannung um $\frac{\pi}{2}$ voraus, $I(t) = I_0\sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$
- Kapazitativer (Blind-)Widerstand: $R_C = \frac{1}{\omega C}$

Lastinduktivität:

- Spannung eilt Strom um $\frac{\pi}{2}$ voraus
- Induktiver Widerstand: $R_L = \omega L$

Impedanz (Scheinwiderstand): $|z| = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{r^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$

Frequenzfilter
Tiefpass (RC-Kreis, Abgriff über Kondensator):

- Phasenrelation: $\tan\Phi = -\omega RC$
- Integrierglied: $U_A = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int Idt = \frac{1}{RC}\int(U_E - U_A)dt$

Hochpass (RC-Kreis, Abgriff über Ohm'schem Widerstand):

- $U_A = \frac{RC\omega}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}} \cdot U_E$
- Differenzierglied: $U_A = R \cdot I = \frac{dQ}{dt}R = \frac{d}{dt}U_E \cdot R \cdot C$

Frequenzfilter (RCL-Stromkreis seriell):

- Resonanzfrequenz: $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Frequenzbreite: $\Delta\omega = \frac{R}{L}$
- Gütefaktor: $Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{\omega_r L}{R}$
- Sperrfilter: RCL-Stromkreis mit L und C parallel

Energie im Magnetfeld
Energie: $E_{magn} = \frac{1}{2}LI^2$

Energiedichte: $w_{magn} = \frac{E_{magn}}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}$

Elektromagnetische Energiedichte: $w_{elektromagnetisch} = \frac{1}{2}\varepsilon_0(E^2 + c^2B^2)$

Maxwell'scher Verschiebungsstrom
Maxwell'scher Verschiebungsstrom: $I_V = \varepsilon_0\vec{A}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Verschiebungsdichte: $\vec{j}_V = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

4. Maxwell-Gleichung: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Kontinuitätsgleichung: $\vec{\nabla}\vec{j} = \frac{\partial}{\partial t}\varrho = 0$

Maxwell-Gleichungen
Gauß'scher Satz der Elektrostatik: $\oint\vec{E}d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$

Gauß'scher Satz der Magnetostatik: $\oint\vec{B}d\vec{A} = 0 \qquad \vec{\nabla}\vec{B} = 0$

Faraday'sches Induktionsgesetz: $\oint\vec{E}d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_A\vec{B}d\vec{A} = -\frac{d}{dt}\Phi_{magn} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$
Ampère-Maxwellsches Gesetz: $\oint\vec{B}d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\underbrace{\int_A\vec{E}d\vec{A}}_{\Phi_{el}} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$

Dielektrische Verschiebungsdichte: $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}_{diel.} + \vec{p} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{p}}{\partial t}$

Elektrodynamische Potentiale: $\Delta\Phi_{el} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi_{el} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \qquad \Delta\vec{A} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$

Elektromagnetische Schwingungen und Wellen

Gedämpfte elektromagnetische Schwingung
Differentialgleichung: $L\frac{d^2}{dt^2} + R\frac{d}{dt} + \frac{1}{c}I = 0$

Eigenwertgleichung: $\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$

Schwingfall: $\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

Gekoppelte Schwingkreise:
Kopplungsgrad $k_{12} = \frac{L_{12}}{L}$

$\Delta\omega = \omega_0 k_{12} = \omega_0 \frac{L_{12}}{L}$

Elektromagnetische Schwingungen
Hertz'scher Dipol, minimale Frequenz: $\omega_0 = \frac{\pi}{l} c\ (Vakuum) = \frac{\pi}{l} v_{ph}$ $\quad v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_{rel} \mu_0 \mu_{rel}}}$

Wellengleichung: $\Delta\vec{E}(\vec{r},t) = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\vec{r},t)$ $\quad \Delta\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B}(\vec{r},t)$

Periodische Welle: $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(kx - \omega t) = \vec{A}_0 e^{i(kx-\omega t)} + \vec{A}_0^* e^{i(kx-\omega t)}$ (bzw. $k\vec{r} - \omega t$ für bel. Richtung)

Magnetfeld elektromagnetischer Wellen: $\vec{B} = \frac{1}{\omega}(\vec{k} \times \vec{E})$ ($\vec{k}$: Ausbreitungs- / Wellenvektor)

Ebene harmonische Welle in x-Richtung: $\vec{E}(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \sin(kx - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{B}(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{c} E_0 \sin(kx - \omega t) \end{pmatrix}$

Intensität (Energiestromdichte) I: $I = w_{em} \cdot c = c\dot{\varepsilon}_0 \cdot E^2$ ($w_{em} = \frac{E}{V}$ Energiedichte elektromagnetisches Feld)

Poynting-Vektor: $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B})$